『魔方陣の新研究』　　摂田　寛二

第８章：軸対称型魔方陣の代数的研究（新）

今まで研究してきた小生の「対称」方陣は，すべて「方陣の幾何学的な中心を中心点とする**点**対称」のタイプであった。対称には，他に**軸**対称もある。左右対称とか上下対称とかの方陣も研究すべきであるとの御指摘をいただいた。まことにその通りであると思うので，急遽「軸対称」の魔方陣を研究対象に選ぶ。

第１節：軸対称四方陣の研究

０． 先ずは４次の軸対称魔方陣について調べる。

１． 基本ポジション

	n１	n２	n３	n４
	n５	n６	n７	n８
→				
	n９	n10	n11	n12
	n13	n14	n15	n16

↑
（対称軸）

２． 連立方程式群

n１＋n２＋n３＋n４＝K ....(1)
n５＋n６＋n７＋n８＝K ....(2)
n９＋n10＋n11＋n12＝K ....(3)
n13＋n14＋n15＋n16＝K ....(4)
n１＋n５＋n９＋n13＝K ....(5)
n２＋n６＋n10＋n14＝K ....(6)
n３＋n７＋n11＋n15＝K ....(7)
n４＋n８＋n12＋n16＝K ....(8)
n１＋n６＋n11＋n16＝K ....(9)
n４＋n７＋n10＋n13＝K ...(10)

四方陣では，自然数１～16を全個，重複なく用いてこの10本の式を満たさなければならない。
先ずKの値を求める。(1)～(4)式の辺々を加える。

n１＋n２＋n３＋·········＋n15＋n16＝4*K
16×17÷２　＝4*K
∴　K＝34　...(11)

今回は，軸対称の例として左右対称四方陣を調べる。次の方程式を追加する。

n１＋n４＝n２＋n３＝n５＋n８＝n６＋n７
＝n９＋n12＝n10＋n11＝n13＋n16＝n14＋n15＝C　...(12)

(12)式から次の２式を選んで辺々を加える。　n１＋n４＝C，　n２＋n３＝C
n１＋n４＋n２＋n３＝2*C
左辺は(1)式のそれと同じであるから，　2*C＝K＝34
ゆえに　C＝34÷２＝17
(12)式の８組のペアは，すべて **17** の補数であるとわかった。

３．

n１	n２	n$\underline{２}$	n$\underline{１}$
	b**A**		b**C**
n５	n６	n$\underline{６}$	n$\underline{５}$
n９	n10	n$\underline{10}$	n$\underline{９}$
	b**B**		b**D**
n13	n14	n$\underline{14}$	n$\underline{13}$

↑（対称軸）

n１＋n２＋n$\underline{２}$＋n$\underline{１}$＝K ....(1)
n５＋n６＋n$\underline{６}$＋n$\underline{５}$＝K ....(2)
n９＋n10＋n$\underline{10}$＋n$\underline{９}$＝K ....(3)
n13＋n14＋n$\underline{14}$＋n$\underline{13}$＝K ....(4)
n１＋n５＋n９＋n13＝K ....(5)
n２＋n６＋n10＋n14＝K ....(6)
n$\underline{２}$＋n$\underline{６}$＋n$\underline{10}$＋n$\underline{14}$＝K ....(7)
n$\underline{１}$＋n$\underline{５}$＋n$\underline{９}$＋n$\underline{13}$＝K ....(8)
n１＋n６＋n$\underline{10}$＋n$\underline{13}$＝K ....(9)
n$\underline{１}$＋n$\underline{６}$＋n10＋n13＝K ...(10)

今回は，最初から補数表現を採用し，上のように定義しなおす。
ただし，$n\underline{1}=C-n1$， $n\underline{2}=C-n2$， $n\underline{5}=C-n5$，・・・・・・
$n\underline{13}=C-n13$， $n\underline{14}=C-n14$
つまり $n1+n\underline{1}=C$， $n2+n\underline{2}=C$， $n5+n\underline{5}=C$，・・・・・・
$n13+n\underline{13}=C$， $n14+n\underline{14}=C$
そして，$bA=n1+n2+n5+n6$， $bB=n9+n10+n13+n14$,
$bC=n\underline{1}+n\underline{2}+n\underline{5}+n\underline{6}$， $bD=n\underline{9}+n\underline{10}+n\underline{13}+n\underline{14}$ とおく。
以上の定義から，何が言えるであろうか。

式(1)～(4)は，恒等的に成り立つ。例えば(1)式は,
$n1+n2+n\underline{2}+n\underline{1}$
$=n1+n2+(C-n2)+(C-n1)=2*C=K$ だから。
ゆえに次のような式も成り立つ。
$n1+n\underline{1}+n13+n\underline{13}=2*C=K$
同様に $n6+n\underline{6}+n10+n\underline{10}=K$
方陣内部にある大小２種類の正方形の頂点連結４数の定和が簡単に言える。

次に(5)～(8)式を見よう。
$n1+n5+n9+n13=K$ ....(5)
$n\underline{1}+n\underline{5}+n\underline{9}+n\underline{13}=K$ ....(8)
ところが，$n1+n5+n\underline{5}+n\underline{1}=K$ であるから,
$n9+n13=n\underline{5}+n\underline{1}$ が言える。
$n1+n5=n\underline{9}+n\underline{13}$ も言える。
同様に(6),(7)式から
$n10+n14=n\underline{6}+n\underline{2}$
$n2+n6=n\underline{10}+n\underline{14}$ も言える。
組み合わせると,
$n1+n5+n2+n6=n\underline{9}+n\underline{13}+n\underline{10}+n\underline{14}$
$n9+n13+n10+n14=n\underline{5}+n\underline{1}+n\underline{6}+n\underline{2}$
これは，ブロック名で言って，b**A**＝b**D** および b**B**＝b**C** を意味する。
しかし，点対称方陣の時のように bA＝bB＝bC＝bD までは言えない。２本の対角線の中にまで対称条件が直接埋め込まれていないからである。

その対角線の(9),(10)式からは，何が言えるだろうか。
$n1+n6+n\underline{10}+n\underline{13}=K$ ....(9)
$n\underline{1}+n\underline{6}+n10+n13=K$ ...(10)
当然 $n1+n6+n\underline{6}+n\underline{1}=K$ $n10+n13+n\underline{13}+n\underline{10}=K$ だから,
$n1+n6=n10+n13$ および $n\underline{1}+n\underline{6}=n\underline{10}+n\underline{13}$ が言える。
また $n1+n\underline{1}+n13+n\underline{13}=2*C=K$
および $n6+n\underline{6}+n10+n\underline{10}=K$ によって，方陣の中心を中心とする正方形の頂点連結四数の定和は言える。
しかし，必ずしも任意の正方形について成り立つとは限らない。せいぜい次のような等式を得るのみである。
(1),(5),(9)の辺々を加えると,
$n1+n2+n\underline{2}+n\underline{1}=K$ ....(1)
$n1+n5+n9+n13=K$ ....(5)
$n1+n6+n\underline{10}+n\underline{13}=K$ ....(9) (+

$n1+n2+n\underline{2}+n\underline{1}+n1+n5+n9+n13+n1+n6+n\underline{10}+n\underline{13}=3*K$

$$(n1+n2+n5+n6)+(n1+n\underline{2}+n9+n\underline{10})+(n1+n\underline{1})+(n13+n\underline{13})=3*K$$
$$(n1+n2+n5+n6)+(n1+n\underline{2}+n9+n\underline{10})+C+C=3*K$$
$$\therefore (n1+n2+n5+n6)+(n1+n\underline{2}+n9+n\underline{10})=2*K$$

....

4． 行列の交換は，できるものとできないものが入り組んで，複雑な様相を呈する。
一番簡単な交換は，例えば次のようなものだ。下図の n５，n９，$n\underline{5}$，$n\underline{9}$

1	n1	n2	$n\underline{2}$	$n\underline{1}$
2	**n5**	n6	$n\underline{6}$	**$n\underline{5}$**
3	**n9**	n10	$n\underline{10}$	**$n\underline{9}$**
4	n13	n14	$n\underline{14}$	$n\underline{13}$

n1	n2	$n\underline{2}$	$n\underline{1}$
n9	n6	$n\underline{6}$	**$n\underline{9}$**
n5	n10	$n\underline{10}$	**$n\underline{5}$**
n13	n14	$n\underline{14}$	$n\underline{13}$

についてペアを上下に交換することができる。
　こうしても，行列の定和は変わらない。
$n5+n\underline{5}=C$
$n9+n\underline{9}=C$
だからだ。

左右方向で（n２，$n\underline{2}$），（n14，$n\underline{14}$）の２ペアを交換することはできない。

左右の（２－３），あるいは上下の（２－３）交換は，シングルではできない。
対角線の定和が成り立たなくなる。ただし，左右も上下も一緒に行えば，ＯＫである。

	1	2	3	4
1	n1	n2	$n\underline{2}$	$n\underline{1}$
2	n5	n6	$n\underline{6}$	$n\underline{5}$
3	n9	n10	$n\underline{10}$	$n\underline{9}$
4	n13	n14	$n\underline{14}$	$n\underline{13}$

×	↓	↓	
n1	$n\underline{2}$	n2	$n\underline{1}$
n5	$n\underline{6}$	n6	$n\underline{5}$
n9	$n\underline{10}$	n10	$n\underline{9}$
n13	$n\underline{14}$	n14	$n\underline{13}$

左右の（２－３）交換だけでは，対角線の定和が崩れる。

上下の（２－３）交換だけでも，だめだ。

×　（２－３）交換

1	n1	n2	$n\underline{2}$	$n\underline{1}$
→	n9	n10	$n\underline{10}$	$n\underline{9}$
→	n5	n6	$n\underline{6}$	$n\underline{5}$
4	n13	n14	$n\underline{14}$	$n\underline{13}$

	○	↓	↓	
	n1	$n\underline{2}$	n2	$n\underline{1}$
→	n9	$n\underline{10}$	n10	$n\underline{9}$
→	n5	$n\underline{6}$	n6	$n\underline{5}$
	n13	$n\underline{14}$	n14	$n\underline{13}$

左右も上下も一緒に（２－３）交換を行うなら，ＯＫ。

では，２本ずつのデュアル交換はどうか。

	1	2	3	4
1	n1	n2	$n\underline{2}$	$n\underline{1}$
2	n5	n6	$n\underline{6}$	$n\underline{5}$
3	n9	n10	$n\underline{10}$	$n\underline{9}$
4	n13	n14	$n\underline{14}$	$n\underline{13}$

× (1-2)&(3-4)交換

n5	n6	$n\underline{6}$	$n\underline{5}$
n1	n2	$n\underline{2}$	$n\underline{1}$
n13	n14	$n\underline{14}$	$n\underline{13}$
n9	n10	$n\underline{10}$	$n\underline{9}$

↓左右も上下も
○ (1-2)&(3-4)交換

n6	n5	$n\underline{5}$	$n\underline{6}$
n2	n1	$n\underline{1}$	$n\underline{2}$
n14	n13	$n\underline{13}$	$n\underline{14}$
n10	n9	$n\underline{9}$	$n\underline{10}$

↑（1-2)＆(3-4)交換をする場合でも，左右・上下に同時に行えばＯＫである。

↓斜めの対角線 ｎ１－n13 を動かさず対称軸にして反転移動させた場合もＯＫ。

	1	2	3	4
1	ｎ１	ｎ２	ｎ２	ｎ１
2	ｎ５	ｎ６	ｎ６	ｎ５
3	ｎ９	n10	n10	ｎ９
4	n13	n14	n14	n13

→

ｎ１	ｎ５	ｎ９	n13
ｎ２	ｎ６	n10	n14
ｎ２	ｎ６	n10	n14
ｎ１	ｎ５	ｎ９	n13

何のことはない。
左右対称四方陣が
上下対称四方陣に
変わっている！
←

具体的に解を探索・計数する場合には，重複計数を防ぐための不等式の立て方が難しい。
左右対称型を上下対称型に作り替えるのは上の例でわかるよう容易だから，今は左右対称型を軸対称の代表として標準形とする。
そして方陣の反転・回転を抑えるために ｎ１＜n16 および ｎ１＜ｎ４＜n13 とする。
（ｎ２，ｎ２），（n14，n14）の２ペアの左右交換を抑えるためには， ｎ２＜ｎ３ とする。
（ｎ５，ｎ９），（ｎ５，ｎ９）の２ペアの上下交換を抑えるためには， ｎ５＜ｎ９ とする。
この２つがあれば，左右上下の（２－３）交換は防げる。
左右・上下の（1-2)＆(3-4）交換を行うと，結果的に対角線上の（ｎ１，ｎ６）が入れ替わるから，それを抑えるために ｎ１＜ｎ６ としよう。
さらに ｎ１にあった数値の移動可能性についても調べておかなければならない。
シングルで（1-2)＆(3-4）交換はできないから，ｎ１を ｎ２や ｎ５に自由に持って来ることはできない。左右上下一緒に行うと，ｎ１は ｎ６に来てしまう。またそれを左右上下一緒に（２－３）変換すると，今度は n11 に来る。方陣の左右を反転してから行列の交換を行っても，せいぜい ｎ７，n10 に来るに過ぎない。
ｎ２，ｎ５，ｎ３，ｎ９，······に ｎ１の数値を簡単に持って来ることはできないから，ｎ２＝１の標準形を別に立てて探索・計数しなければならない。そしてこの場合も，重複を防ぐために不等式を立てなければならない。
·············
何だかんだと言って，禁止規則が複雑になり過ぎてしまうのは，頭の痛い点だ。そのうちにどの程度の重複を防ぎたいのか，自分でもわからなくなる。こうした事態は，なるべく避けるのが賢明だ。
規則は，絶対的にシンプルでなければならない。複雑になり過ぎたら，御破算にして，出直すのみ。
余りに厳しい場合分けをせずに，今回は単純に ｎ１＜n16 および ｎ１＜ｎ４＜n13 とする。
そして，解を見てから，後で整理をすることにしよう。

５． 解は多そうなので，プログラムで探索・計数する。
結果として，**304**個の解を得た。最小限の重複を省くと，**76**個になる。その一部を以下に示す。なかなかに可愛い容姿だが，中身は個性的だ。手強い「癖」がある。

1/

1	2	15	16
12	14	3	5
13	7	10	4
8	11	6	9

2/

1	3	14	16
10	13	4	7
15	6	11	2
8	12	5	9

3/

1	3	14	16
12	13	4	5
15	8	9	2
6	10	7	11

4/

1	4	13	16
8	15	2	9
14	5	12	3
11	10	7	6

			5/				6/				7/				8/
1	4	13	16	1	4	13	16	1	4	13	16	1	5	12	16
8	14	3	9	12	15	2	5	12	14	3	5	10	11	6	7
15	5	12	2	14	9	8	3	15	9	8	2	15	4	13	2
10	11	6	7	7	6	11	10	6	7	10	11	8	14	3	9

			9/				10/				11/				12/
1	5	12	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16
14	11	6	3	8	15	2	9	7	15	2	10	8	12	5	9
15	8	9	2	12	3	14	5	14	4	13	3	15	3	14	2
4	10	7	13	13	10	7	4	12	9	8	5	10	13	4	7

			13/				14/				15/				16/
1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	7	10	16
12	10	7	5	12	15	2	5	14	12	5	3	8	14	3	9
13	3	14	4	14	9	8	3	15	9	8	2	12	2	15	5
8	15	2	9	7	4	13	10	4	7	10	13	13	11	6	4

			17/				18/				19/				20/
1	7	10	16	1	7	10	16	1	7	10	16	1	7	10	16
8	12	5	9	12	14	3	5	12	9	8	5	14	12	5	3
14	2	15	3	15	9	8	2	15	4	13	2	15	9	8	2
11	13	4	6	6	4	13	11	6	14	3	11	4	6	11	13

			21/				22/				23/				24/
1	7	10	16	1	8	9	16	2	1	16	15	2	3	14	15
14	9	8	3	7	13	4	10	11	13	4	6	8	16	1	9
15	6	11	2	14	2	15	3	14	8	9	3	11	5	12	6
4	12	5	13	12	11	6	5	7	12	5	10	13	10	7	4

・・・・・・・・（途中省略）・・・・・・・・

			73/				74/				75/				76/
6	2	15	11	6	3	14	11	6	4	13	11	6	4	13	11
7	16	1	10	7	16	1	10	3	9	8	14	9	15	2	8
12	13	4	5	12	13	4	5	15	5	12	2	12	14	3	5
9	3	14	8	9	2	15	8	10	16	1	7	7	1	16	10

[Count = 76]

この左右対称型を上下対称型に作り換えるのは，簡単だ。従って，軸対称の四方陣の解の数は２倍の 608個（或いは 152個）あることになる。

６． 点対称の四方陣は，既に別項で調べたように基本解が**３**個あった。

しかし，今回の軸対称のものとは。とても一緒にはできないように思う。数え方が違うからである。異形・派生形の整理の仕方がもともと違うし，また仕様を共通にすることも難しい。従って，対称型の方陣として一くくりにはできないと，主張したい。

点対称の基本解が３個と言う主張は，汎四方陣の基本解と同数であるという主張と結びついていて，事実この２種類の方陣はのっぴきならない形で構造的に結びついていたのである。

軸対称四方陣には，このような特別な「運命」はまだ発見されていない。小生の得た感触としては，今のところ単なる「面白方陣」の１つという位置付けに過ぎない。

（October 13，2000　MWCW による計数：摂田　寛二(Kanji Setsuda)）

付録：対角線対称型四方陣の可能性について

０． 軸対称には，下図のような場合もあり得る。例えば， ｎ１－n16 の対角線を軸として対称の位置にある２数の和を等しくするのである。

１． 基本ポジション

ｎ**１**	ｎ２	ｎ３	ｎ４
ｎ$\underline{２}$	ｎ**６**	ｎ７	ｎ８
ｎ$\underline{３}$	ｎ$\underline{７}$	n**11**	n12
ｎ$\underline{４}$	ｎ$\underline{８}$	n$\underline{12}$	n**16**

２． 連立方程式群

ｎ１＋ｎ２＋ｎ３＋ｎ４＝Ｋ ....(1)
ｎ$\underline{２}$＋ｎ６＋ｎ７＋ｎ８＝Ｋ ....(2)
ｎ$\underline{３}$＋ｎ$\underline{７}$＋n11＋n12＝Ｋ ....(3)
ｎ$\underline{４}$＋ｎ$\underline{８}$＋n$\underline{12}$＋n16＝Ｋ ....(4)
ｎ１＋ｎ$\underline{２}$＋ｎ$\underline{３}$＋ｎ$\underline{４}$＝Ｋ ....(5)
ｎ２＋ｎ６＋ｎ$\underline{７}$＋ｎ$\underline{８}$＝Ｋ ....(6)
ｎ３＋ｎ７＋n11＋n$\underline{12}$＝Ｋ ....(7)
ｎ４＋ｎ８＋n12＋n16＝Ｋ ....(8)
ｎ１＋ｎ６＋n11＋n16＝Ｋ ....(9)［対称軸］
ｎ４＋ｎ７＋ｎ$\underline{７}$＋ｎ$\underline{４}$＝Ｋ ...(10)

ただし，ｎ$\underline{２}$＝Ｃ－ｎ２，ｎ$\underline{３}$＝Ｃ－ｎ３，ｎ$\underline{４}$＝Ｃ－ｎ４，
ｎ$\underline{７}$＝Ｃ－ｎ７，ｎ$\underline{８}$＝Ｃ－ｎ８，n$\underline{12}$＝Ｃ－n12　である。
Ｋ＝34，Ｃ＝17　は踏襲する。当然　Ｋ＝2*Ｃ　である。

(1),(5)式をくらべる。

ｎ１＋ｎ２＋ｎ３＋ｎ４＝Ｋ ....(1)
＋）ｎ１＋ｎ$\underline{２}$＋ｎ$\underline{３}$＋ｎ$\underline{４}$＝Ｋ ....(5)

ｎ１＋ｎ２＋ｎ３＋ｎ４＋ｎ１＋ｎ$\underline{２}$＋ｎ$\underline{３}$＋ｎ$\underline{４}$＝2*Ｋ
ｎ１＋ｎ１＋（ｎ２＋ ｎ$\underline{２}$）＋(ｎ３＋ｎ$\underline{３}$)＋(ｎ４＋ｎ$\underline{４}$)＝2*Ｋ
2*ｎ１　＋Ｃ　＋Ｃ　＋Ｃ　＝2*Ｋ
2*ｎ１　＋17　＋17　＋17　＝68
2*ｎ１＝17
∴　ｎ１＝8.5

(2),(6)式をくらべる。

ｎ$\underline{２}$＋ｎ６＋ｎ７＋ｎ８＝Ｋ ....(2)
＋）ｎ２＋ｎ６＋ｎ$\underline{７}$＋ｎ$\underline{８}$＝Ｋ ....(6)

ｎ$\underline{２}$＋ｎ６＋ｎ７＋ｎ８＋ｎ２＋ｎ６＋ｎ$\underline{７}$＋ｎ$\underline{８}$＝2*Ｋ
（ｎ２＋ ｎ$\underline{２}$）＋ｎ６＋ｎ６＋(ｎ７＋ｎ$\underline{７}$)＋(ｎ８＋ｎ$\underline{８}$)＝2*Ｋ
Ｃ　＋2*ｎ６　＋Ｃ　＋Ｃ　＝2*Ｋ
17　＋2*ｎ６　＋17　＋17　＝68
2*ｎ６＝17
∴　ｎ６＝8.5

....

ｎ１，ｎ６ともに別個の自然数でなければならないのに，同じ 8.5 となるのは，不合理である。この不合理は，対角線対称の仮定から来ている。よって，このタイプの軸対称方陣は，構成不可能である。

一般に対称軸上に２個以上の数があると，必ずこのような不合理に陥る。よって，方陣の対角線上に対称軸を仮定してはならない。

（October 15, 2000　摂田　寛二(Kanji Setsuda)）

第２節：軸対称五方陣の代数的研究

１． 基本ポジション

	n１	n２	n３	n４	n５
	n６	n７	n８	n９	n10
→	n11	n12	n13	n14	n15
	n16	n17	n18	n19	n20
	n21	n22	n23	n24	n25

２． 連立方程式群

自然数１～25を全個，重複なく用いて，

n１＋n２＋n３＋n４＋n５＝K ....(1)
n６＋n７＋n８＋n９＋n10＝K ....(2)
n11＋n12＋n13＋n14＋n15＝K ....(3)
n16＋n17＋n18＋n19＋n20＝K ....(4)
n21＋n22＋n23＋n24＋n25＝K ....(5)
n１＋n６＋n11＋n16＋n21＝K ....(6)
n２＋n７＋n12＋n17＋n22＝K ....(7)
n３＋n８＋n13＋n18＋n23＝K ....(8)
n４＋n９＋n14＋n19＋n24＝K ....(9)
n５＋n10＋n15＋n20＋n25＝K ...(10)

対角線上の５数の定和を示す式：

n１＋n７＋n13＋n19＋n25＝K ...(11)
n５＋n９＋n13＋n17＋n21＝K ...(12)

を満たさなければならない。

さらに軸対称（今回は「上下対称」）を表す式として，

n１＋n21＝n２＋n22＝n３＋n23＝n４＋n24＝n５＋n25＝
n６＋n16＝n７＋n17＝n８＋n18＝n９＋n19＝n10＋n20＝
n11＋n11＝n12＋n12＝n13＋n13＝n14＋n14＝n15＋n15＝C ...(13)　を加える。

ただし，２倍して定数Cになる自然数が５通りもあるわけは無いから，
　n11＋n11＝n12＋n12＝n14＋n14＝n15＋n15＝C　を破棄し，n13＋n13＝C　のみを残す。
n11，n12，n14，n15 については，補数を定義しない。これは，対称性を生かすための言わば「やむを得ざる超法規的措置」である。

先ず定数K，Cの値を予め決めておこう。
(1)～(5)式の辺々を加える。

n１＋n２＋n３＋·········＋n24＋n25＝5*K
25×26÷２ ＝5*K
∴ K＝325÷５＝65 ....(14)

また(13)式から　n３＋n23＝C　n８＋n18＝C　n13＋n13＝C　の辺々を足す。

n３＋n23＋n８＋n18＋n13＋n13＝3*C
（n３＋n８＋n18＋n13＋n23）＋n13＝3*C
（n３＋n８＋n18＋n13＋n23）＝3*C－n13

この式の左辺は，(8)式のそれと同じである。また n13＝C／2　から

K＝3*C－C／2
65＝2.5*C
130＝5*C
∴ C＝26 ....(15)

つまり，(13)式の11組のペアは，**26** の補数群である。
また　n13＝13　と決まる。

３． 早速にも補数表現を採用し，基本を定義しなおす。

	n１	n２	n３	n４	n５
	n６	n７	n８	n９	n10
→	n11	n12	n**13**	n14	n15
	n$\underline{6}$	n$\underline{7}$	n$\underline{8}$	n$\underline{9}$	n$\underline{10}$
	n$\underline{1}$	n$\underline{2}$	n$\underline{3}$	n$\underline{4}$	n$\underline{5}$

自然数１～25を全個，重複なく用いて，

n１＋n２＋n３＋n４＋n５＝K ....(1)
n６＋n７＋n８＋n９＋n10＝K ....(2)
n11＋n12＋n13＋n14＋n15＝K ....(3)
n$\underline{6}$＋n$\underline{7}$＋n$\underline{8}$＋n$\underline{9}$＋n$\underline{10}$＝K ....(4)
n$\underline{1}$＋n$\underline{2}$＋n$\underline{3}$＋n$\underline{4}$＋n$\underline{5}$＝K ....(5)
n１＋n６＋n11＋n$\underline{6}$＋n$\underline{1}$＝K ....(6)
n２＋n７＋n12＋n$\underline{7}$＋n$\underline{2}$＝K ....(7)
n３＋n８＋n13＋n$\underline{8}$＋n$\underline{3}$＝K ....(8)
n４＋n９＋n14＋n$\underline{9}$＋n$\underline{4}$＝K ....(9)
n５＋n10＋n15＋n$\underline{10}$＋n$\underline{5}$＝K ...(10)

対角線上の５数の定和を示す式は，

n１＋n７＋n13＋n$\underline{9}$＋n$\underline{5}$＝K ...(11)
n５＋n９＋n13＋n$\underline{7}$＋n$\underline{1}$＝K ...(12)

を満たさなければならない。n13＝13　は既にわかっている。

ただし，n$\underline{1}$＝C－n１，　n$\underline{2}$＝C－n２，　n$\underline{3}$＝C－n３，　・・・・・・　，
n$\underline{9}$＝C－n９，　n$\underline{10}$＝C－n10　である。

当然　n１＋n$\underline{1}$＝n２＋n$\underline{2}$＝n３＋n$\underline{3}$＝・・・・・・＝n９＋n$\underline{9}$＝n10＋n$\underline{10}$＝C

(5)式や(4)式は，n$\underline{1}$＋n$\underline{2}$＋n$\underline{3}$＋n$\underline{4}$＋n$\underline{5}$＝
(C－n１)＋(C－n２)＋(C－n３)＋(C－n４)＋(C－n５）＝
5*C－（n１＋n２＋n３＋n４＋n５）＝2*K－K＝K
というぐあいに，(1),(2)式が成り立てば恒等的に成り立つ。

４． 以下に軸対称五方陣が構成不可能なことを背理法をもって証明する。

(6)～(10)式を見ていただきたい。

n１＋n６＋n11＋n$\underline{6}$＋n$\underline{1}$＝K ....(6)
n２＋n７＋n12＋n$\underline{7}$＋n$\underline{2}$＝K ....(7)
n３＋n８＋n13＋n$\underline{8}$＋n$\underline{3}$＝K ....(8)
n４＋n９＋n14＋n$\underline{9}$＋n$\underline{4}$＝K ....(9)
n５＋n10＋n15＋n$\underline{10}$＋n$\underline{5}$＝K ...(10)

(8)式は，定義式であるから，これを認めざるを得ない。

(n３＋n$\underline{3}$)＋(n８＋n$\underline{8}$)＋n13＝C＋C＋13＝26＋26＋13＝65＝K　という構成だ。

(6)式はどうか。

(n１＋n$\underline{1}$)＋(n６＋n$\underline{6}$)＋n11＝C＋C＋n11＝2*C＋n11＝K
52 ＋n11＝65
∴ n11＝13

(7)式はどうか。やはり，　2*C＋n12＝K　となり，　n12＝13
(9)式はどうか。やはり，　2*C＋n14＝K　となり，　n14＝13
(10)式はどうか。やはり，　2*C＋n15＝K　となり，　n15＝13
....

n11，n12，・・・・・，n15 の５変数の値が同じ 13 になってしまう。「やむを得ざる超法規的措置」を採ったにもかかわらず・・・・・・。これは，数値の重複を許さない最初の約束に反する重大な矛盾だ。この矛盾をもたらしたのは，軸対称性の要請ゆえであった。

よって，軸対称五方陣は，構成不可能である。

（October 14, 2000　摂田　寛二(Kanji Setsuda)）

第３節：軸対称六方陣の代数的研究

1． 基本ポジションの定義

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

（太線は対称軸）

2． 連立方程式

n１＋n２＋n３＋n４＋n５＋n６＝K ......(1)
n７＋n８＋n９＋n10＋n11＋n12＝K ......(2)
n13＋n14＋n15＋n16＋n17＋n18＝K ......(3)
n19＋n20＋n21＋n22＋n23＋n24＝K ......(4)
n25＋n26＋n27＋n28＋n29＋n30＝K ......(5)
n31＋n32＋n33＋n34＋n35＋n36＝K ......(6)
n１＋n７＋n13＋n19＋n25＋n31＝K ......(7)
n２＋n８＋n14＋n20＋n26＋n32＝K ......(8)
n３＋n９＋n15＋n21＋n27＋n33＝K ......(9)
n４＋n10＋n16＋n22＋n28＋n34＝K .....(10)
n５＋n11＋n17＋n23＋n29＋n35＝K .....(11)
n６＋n12＋n18＋n24＋n30＋n36＝K .....(12)
n１＋n８＋n15＋n22＋n29＋n36＝K .....(13)
n６＋n11＋n16＋n21＋n26＋n31＝K .....(14)

(13)，(14)式は２本の対角線上の６数の定和を定義している。
これに軸対称性（今回は「上下対称型」）を表す次の式を加える。

n１＋n31＝n２＋n32＝n３＋n33＝n４＋n34＝n５＋n35＝n６＋n36＝
n７＋n25＝n８＋n26＝n９＋n27＝n10＋n28＝n11＋n29＝n12＋n30＝
n13＋n19＝n14＋n20＝n15＋n21＝n16＋n22＝n17＋n23＝n18＋n24＝C .....(15)

K，Cの値を先に決めておこう。
(1)～(6)式の辺々を加えて，

n１＋n２＋n３＋······＋n35＋n36＝6*K
36×37÷２ ＝6*K
ゆえに K＝111 .....(16)

(15)式から n１＋n31＝n７＋n25＝n13＋n19＝C の辺々を加える。

n１＋n31＋n７＋n25＋n13＋n19＝3*C

左辺は(7)式と同じである。ゆえに K＝3*C
(16)式の K＝111 から C＝111÷３＝37 .....(17)
(15)式の18組のペアは，**37** の補数群であることがわかった。

3． 早速にも補数表現を用いて，基本条件を書き換える。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
$\underline{13}$	$\underline{14}$	$\underline{15}$	$\underline{16}$	$\underline{17}$	$\underline{18}$
$\underline{7}$	$\underline{8}$	$\underline{9}$	$\underline{10}$	$\underline{11}$	$\underline{12}$
$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{5}$	$\underline{6}$

（太線は対称軸）

n１＋n２＋n３＋n４＋n５＋n６＝K ......(1)
n７＋n８＋n９＋n10＋n11＋n12＝K ......(2)
n13＋n14＋n15＋n16＋n17＋n18＝K ......(3)
n$\underline{13}$＋n$\underline{14}$＋n$\underline{15}$＋n$\underline{16}$＋n$\underline{17}$＋n$\underline{18}$＝K ......(4)
n$\underline{7}$＋n$\underline{8}$＋n$\underline{9}$＋n$\underline{10}$＋n$\underline{11}$＋n$\underline{12}$＝K ......(5)
n$\underline{1}$＋n$\underline{2}$＋n$\underline{3}$＋n$\underline{4}$＋n$\underline{5}$＋n$\underline{6}$＝K ......(6)
n１＋n７＋n13＋n$\underline{13}$＋n$\underline{7}$＋n$\underline{1}$＝K ......(7)
n２＋n８＋n14＋n$\underline{14}$＋n$\underline{8}$＋n$\underline{2}$＝K ......(8)
n３＋n９＋n15＋n$\underline{15}$＋n$\underline{9}$＋n$\underline{3}$＝K ......(9)
n４＋n10＋n16＋n$\underline{16}$＋n$\underline{10}$＋n$\underline{4}$＝K .....(10)
n５＋n11＋n17＋n$\underline{17}$＋n$\underline{11}$＋n$\underline{5}$＝K .....(11)
n６＋n12＋n18＋n$\underline{18}$＋n$\underline{12}$＋n$\underline{6}$＝K .....(12)
n１＋n８＋n15＋n$\underline{16}$＋n$\underline{11}$＋n$\underline{6}$＝K .....(13)
n６＋n11＋n16＋n$\underline{15}$＋n$\underline{8}$＋n$\underline{1}$＝K .....(14)

ただし，　$n\underline{1}=C-n1$，　$n\underline{2}=C-n2$，　$n\underline{3}=C-n3$，・・・・・・・・・・，
$n\underline{17}=C-n17$，　$n\underline{18}=C-n18$　である。
つまり，　$n1+n\underline{1}=C$，　$n2+n\underline{2}=C$，　$n3+n\underline{3}=C$，・・・・・・・・・・，
$n17+n\underline{17}=C$，　$n18+n\underline{18}=C$　が，補数の定義である。
ブロック名は，$bA=n1+n2+n3+n7+n8+n9+n13+n14+n15$
$bB=n4+n5+n6+n10+n11+n12+n16+n17+n18$
$bC=n\underline{13}+n\underline{14}+n\underline{15}+n\underline{7}+n\underline{8}+n\underline{9}+n\underline{1}+n\underline{2}+n\underline{3}$
$bD=n\underline{16}+n\underline{17}+n\underline{18}+n\underline{10}+n\underline{11}+n\underline{12}+n\underline{4}+n\underline{5}+n\underline{6}$　とする。

(4)～(6)式は，(1)～(3)式が成り立てば，恒等的に成り立つ。例えば(６)式は，
$n\underline{1}+n\underline{2}+n\underline{3}+n\underline{4}+n\underline{5}+n\underline{6}=$
$(C-n1)+(C-n2)+(C-n3)+(C-n4)+(C-n5)+(C-n6)=$
$6*C-(n1+n2+n3+n4+n5+n6)=2*K-K=K$
という構成になっている。ちなみに(17)式から，$3*C=K$　である。

(7)式は，$n1+n7+n13+n\underline{13}+n\underline{7}+n\underline{1}=$
$(n1+n\underline{1})+(n7+n\underline{7})+(n13+n\underline{13})=C+C+C=K$
(8)～(12)式も恒等的に成り立つ。

一方　$n1+n6+n\underline{6}+n\underline{1}=2*C$
$n8+n11+n\underline{11}+n\underline{8}=2*C$
$n15+n16+n\underline{16}+n\underline{15}=2*C$　は，
中心を方陣の中心と同じうする大中小の正方形の頂点連結４数の和が一定（=74）であることを示す。

対角線の式(13)，(14)に　$n1+n8+n15+n\underline{15}+n\underline{8}+n\underline{1}=K$　を加えてくらべると，
$n1+n8+n15+n\underline{16}+n\underline{11}+n\underline{6}=K$　.....(13)
$n6+n11+n16+n\underline{15}+n\underline{8}+n\underline{1}=K$　.....(14)
$n\underline{15}+n\underline{8}+n\underline{1}=n\underline{16}+n\underline{11}+n\underline{6}$　および　$n1+n8+n15=n6+n11+n16$　が言える。

	ブロックA			ブロックB		
1	1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18

	$\underline{13}$	$\underline{14}$	$\underline{15}$	$\underline{16}$	$\underline{17}$	$\underline{18}$
	$\underline{7}$	$\underline{8}$	$\underline{9}$	$\underline{10}$	$\underline{11}$	$\underline{12}$
6	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{5}$	$\underline{6}$
	ブロックC			ブロックD		

左図で上下第１行と第６行をくらべる。
$n1+n2+n3+n\underline{1}+n\underline{2}+n\underline{3}=K$　から
$n4+n5+n6=n\underline{1}+n\underline{2}+n\underline{3}$　.....(18)
また　$n4+n5+n6+n\underline{4}+n\underline{5}+n\underline{6}=K$
∴　$n1+n2+n3=n\underline{4}+n\underline{5}+n\underline{6}$　.....(19)
同様にして
$n7+n8+n9=n\underline{10}+n\underline{11}+n\underline{12}$　.....(20)
$n10+n11+n12=n\underline{7}+n\underline{8}+n\underline{9}$　.....(21)
$n13+n14+n15=n\underline{16}+n\underline{17}+n\underline{18}$　.....(22)
$n16+n17+n18=n\underline{13}+n\underline{14}+n\underline{15}$　.....(23)
(19)+(20)+(22)
$n1+n2+n3+n7+n8+n9+n13+n14+n15$
$=n\underline{4}+n\underline{5}+n\underline{6}+n\underline{10}+n\underline{11}+n\underline{12}+n\underline{16}+n\underline{17}+n\underline{18}$
これは，ブロック $bA=bD$　を示している。
(18)+(21)+(23)
$n4+n5+n6+n10+n11+n12+n16+n17+n18$
$=n\underline{1}+n\underline{2}+n\underline{3}+n\underline{7}+n\underline{8}+n\underline{9}+n\underline{13}+n\underline{14}+n\underline{15}$
これは，つまり　ブロック $bB=bC$　を示している。
しかし，$bA=bB=bC=bD$　までは言えない。ここが，点対称と違う所だ。

4． 行列の交換可能性を調べる。

原型［補数表現］

	1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12
3	13	14	15	16	17	18
4	13	14	15	16	17	18
	7	8	9	10	11	12
	1	2	3	4	5	6

上下（３－４）交換

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
13	14	15	16	17	18
7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6

×

左右上下（３－４）交換

1	2	4	3	5	6
7	8	10	9	11	12
13	14	16	15	17	18
13	14	16	15	17	18
7	8	10	9	11	12
1	2	4	3	5	6

○　↑　↑

上の例でわかるように左右あるいは上下だけの（３－４）シングル交換は×。対角線の定和が崩れる。しかし，左右上下ともに行うダブル交換ならば○だ。これは（２－５）交換でも事情は同じだ。

原型［補数表現］

1	1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12
3	13	14	15	16	17	18
4	13	14	15	16	17	18
	7	8	9	10	11	12
6	1	2	3	4	5	6

×上下（1-3)＆(4-6）交換

13	14	15	16	17	18
7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18

×

左右上下ダブル
○（1-3)＆(4-6）交換

15	14	13	18	17	16
9	8	7	12	11	10
3	2	1	6	5	4
3	2	1	6	5	4
9	8	7	12	11	10
15	14	13	18	17	16

↑　↑　↑　↑

(1-3)＆(4-6）交換も，左右だけ或いは上下だけのシングル交換では，対角線の定和が崩れる。しかし，左右上下一緒にダブル交換すると，ＯＫになる。（1-2)＆(5-6）交換或いは
（2-3)＆(4-5）交換でも，事情は同じだ。もちろん（1-2-3)＆(4-5-6）交換も，同じだ。

それから，対角線に関わらない左右の対応ペア２組も，交換可能だ。（下図）↓

原型［補数表現］

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
13	14	15	16	17	18
7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6

○　上下ペア交換１

1	5	3	4	2	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
13	14	15	16	17	18
7	8	9	10	11	12
1	5	3	4	2	6

○　上下ペア交換２

1	2	4	3	5	6
7	8	9	10	11	12
13	17	15	16	14	18
13	17	15	16	14	18
7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6

これは　$n5+n\underline{5}=n2+n\underline{2}=n17+n\underline{17}=n14+n\underline{14}=C$　ゆえに成り立つのである。

こうした行列の交換可能性を知っていれば，１つの原型から幾つもの異形・派生形を作り出すことができる。これを別の１個と数えるべきか，迷うところだ。
今までは，「順序が変わっても行列の内容が元のものと変わらなければ，同じとする」というのが原則だった。しかし，例えば，上の最後の例で見ると，横の行内容は変わらなくても，縦の列内容が変わってしまっている。別の１個と数えられてしまう。少々ずるい気がしないでもない。
方陣の探索・計数の時には，重複を避けるために不等式をいろいろ立てて来た。今回は，立て方が難しい。シングルは駄目でもダブルはＯＫだなんてぇ交換は，どうすれば良いのだろう。
左右の交換だけと言うのもある。軸対称では，縦と横が同格ではないからだ。
変な式をいっぱい立てると，チェック作業が難しくなる。いっそ
$n1<n36$,　$n1<n6<n31$　だけとしたくなる。
不等式の立て方が違えば，出て来る解の数は当然違ってくる。条件を厳しくすると，解が少なくなり過ぎる。ゆるくすると，出過ぎてしまう。
とても点対称の時と同じにするわけには行かない。同じになり様もない。

５． 解の数はめっぽう多いので，パソコンに数えさせる。何千万個数えても，いっこうに先が見えて来ない。いつも途中で計数を諦めざるをえない。リストの最初の一部を下に示す。

1/

1	34	6	5	30	35
33	24	11	12	8	23
19	15	27	9	20	21
18	22	10	28	17	16
4	13	26	25	29	14
36	3	31	32	7	2

489601/

1	34	7	5	29	35
33	22	11	12	9	24
19	16	27	6	20	23
18	21	10	31	17	14
4	15	26	25	28	13
36	3	30	32	8	2

1139329/

1	34	8	5	28	35
33	20	11	15	7	25
19	14	27	6	21	24
18	23	10	31	16	13
4	17	26	22	30	12
36	3	29	32	9	2

1760257/

1	34	7	6	28	35
33	20	11	14	8	25
19	15	27	5	21	24
18	22	10	32	16	13
4	17	26	23	29	12
36	3	30	31	9	2

2336257/

1	34	9	5	27	35
33	18	11	16	8	25
20	14	31	7	15	24
17	23	6	30	22	13
4	19	26	21	29	12
36	3	28	32	10	2

3056257/

1	34	8	6	27	35
33	18	11	15	9	25
20	13	32	7	16	23
17	24	5	30	21	14
4	19	26	22	28	12
36	3	29	31	10	2

3710593/

1	34	10	5	26	35
33	18	12	13	7	28
20	14	31	8	16	22
17	23	6	29	21	15
4	19	25	24	30	9
36	3	27	32	11	2

4358017/

1	34	9	6	26	35
33	17	10	18	8	25
21	13	32	7	15	23
16	24	5	30	22	14
4	20	27	19	29	12
36	3	28	31	11	2

5012353/

1	34	8	7	26	35
33	17	10	18	9	24
21	14	31	5	15	25
16	23	6	32	22	12
4	20	27	19	28	13
36	3	29	30	11	2

5695489/

1	34	11	5	25	35
33	18	9	16	8	27
20	14	31	7	15	24
17	23	6	30	22	13
4	19	28	21	29	10
36	3	26	32	12	2

6524929/

1	34	10	6	25	35
33	17	9	18	8	26
21	13	32	7	15	23
16	24	5	30	22	14
4	20	28	19	29	11
36	3	27	31	12	2

7165441/

1	34	9	7	25	35
33	16	10	18	8	26
20	14	32	6	15	24
17	23	5	31	22	13
4	21	27	19	29	11
36	3	28	30	12	2

8029441/

1	34	12	5	24	35
33	18	9	16	8	27
20	14	30	6	15	26
17	23	7	31	22	11
4	19	28	21	29	10
36	3	25	32	13	2

8672257/

1	34	11	6	24	35
33	17	9	18	7	27
21	12	32	8	15	23
16	25	5	29	22	14
4	20	28	19	30	10
36	3	26	31	13	2

9317377/

1	34	10	7	24	35
33	16	9	20	8	25
19	11	31	5	22	23
18	26	6	32	15	14
4	21	28	17	29	12
36	3	27	30	13	2

10033921/

1	34	9	8	24	35
33	15	10	20	7	26
19	12	31	5	21	23
18	25	6	32	16	14
4	22	27	17	30	11
36	3	28	29	13	2

10670977/

1	34	13	5	23	35
33	18	9	16	8	27
20	12	31	7	15	26
17	25	6	30	22	11
4	19	28	21	29	10
36	3	24	32	14	2

11605249/

1	34	12	6	23	35
33	17	9	18	7	27
21	11	32	8	15	24
16	26	5	29	22	13
4	20	28	19	30	10
36	3	25	31	14	2

12378241/

1	34	11	7	23	35
33	16	9	18	8	27
20	13	32	6	15	25
17	24	5	31	22	12
4	21	28	19	29	10
36	3	26	30	14	2

13264129/

1	34	10	8	23	35
33	15	9	21	7	26
19	12	31	5	20	24
18	25	6	32	17	13
4	22	28	16	30	11
36	3	27	29	14	2

・・・・・・・・・・・・

↑

【上下対称六方陣の解の例】

6. 「点対称」六方陣の解の数は，**0** 個であった。それにくらべて「軸対称型」の解の数の多さはどうだろう。容姿は可愛くても，その多産性には驚き呆れる。「もうこれは，別の生き物だな」と思わざるを得ない。

点対称方陣と軸対称方陣を一緒にして同じ「対称方陣」としてくくることはできない，と思う。概念的にはできても，内容的に意味が無い。外見は似ていても，内容が違い過ぎる。第一，数え方からして違う。解の数の意味の重さが違う。

特に偶数次の魔方陣においては，点対称方陣の基本解の数は，補数型完全方陣の基本解の数と同じであった。この同数性は，方陣の根幹に関わるある特質（「運命」と言っても良い）を表現しているのであって，その意味は断然重い。

それにくらべれば，軸対称方陣の解の数の意味は全然軽い。

それに軸対称型は，奇数次の方陣では構成不可能だ。例外規則をいろいろ設けても‥‥‥。

規則を曲げ過ぎると，統一する意味も薄くなってしまう。

小生の感想を言えば，軸対称型は方陣研究の傍流に置いても差し支えないと思う。研究の本流は，あくまで点対称型と汎魔方陣である，と思う。

（October 14, 2000　MWCW による計数：摂田　寛二(Kanji Setsuda)）