Goemans と Williamson の近似解法

松井知己
東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻

1　はじめに

本稿では，Goemans と Williamson によって近年提案された，組合せ最適化問題の近似解法の解説を行なう．取り上げる話題は，MAX SAT 問題に対する 3/4 近似解法，最大カット問題に対する 0.878 近似解法，最後に MAX 2SAT 問題に対する 0.878 近似解法についても簡単に触れる．

ある解法によって求められる解が，最適解からある程度の距離しか離れていない事が保証できるとき，その解法を近似解法と呼ぶ事が多い．他方，そのような保証ができないとき，その解法を発見的解法と呼ぶ事が多い．しかしながら，上記のような「近似解法」と「発見的解法」の使い分けは，研究者の間でも必ずしも同意されている訳ではない．

目的関数を最大化する最適化問題に対するある解法が，最適値の α 倍程度の目的関数値を持つ許容解を必ず見つけるとき，この解法は α 近似解法であると呼ばれる．ただし α は $0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす数である．この定義から明らかなように，最適値が負の値を取る可能性のある問題に対しては，この定義はあまり意味を持たない．

2　MAX SAT 問題の近似解法

Goemans and Williamson による MAX SAT 問題の 3/4 近似解法は，線形計画法を用いたランダム化アルゴリズムであり，ランダム化に用いる確率変数を問題例によって変える最初の算法であった．

2.1　MAX SAT 問題

連言標準形の論理式が与えられているとき，論理式が真となるような基本論理式への真偽の割当があるかを問う問題は，SAT 問題と呼ばれ，NP- 完全であることが証明された最初の問題である．これに対し，与えられた連言標準形の論理式のクローズのうち真となる個数を最大にするような，基本論理式への真偽の割当を求める問題を MAX SAT と呼ぶ．さらにこの一般形として，各クローズに非負の重みが与えられているとし，真となるクローズの重みの総和を最大化する問題も，MAX SAT と呼ばれる．本稿では，非負重みが与えられた一般形の問題について扱う．

MAX SAT 問題は，各クローズに入っているリテラルの数が k 個以内のとき MAX kSAT 問題と呼ばれる．MAX kSAT 問題は $k = 2$ であっても NP- 困難であることが知られている．また MAX 2SAT 問題は，1 未満の定数 α^* が存在して，多項式時間の α^* 近似解法が存在する可能性は，絶望的であることが知られている．

2.2　MAX SAT 問題の 1/2 近似解法

MAX SAT 問題の 1/2 近似解法は，簡単に作ることができる．各基本論理式を 1/2 の確率で真または偽とすれば，各クローズは 1/2 以上の確率で真となり，真となるクローズの重みの総和の期待値は，クローズの重みの総和の 1/2 以上となる．ゆえに各基本論理式の真偽を 1/2 で振り分けるシミュレーションを何回も行なうことにより，クローズの重みの総和の 1/2 以上の値を持つ解を求める事が出来る．MAX SAT 問題の最適値はクローズの重みの総和以下であるから，この解は最適値の 1/2 以上の目的関数値を取ることが出来る．

上記の算法は Johnson の算法と呼ばれている．各クローズ内のリテラルの数が 2 個以上（以下でない事に注意）ならば，各クローズが真となる確率は 3/4 以上となり，Johnson の解法は 3/4 近似解法となる．同様に，各クローズ内のリテラルの数が k 以上ならば，Johnson の解法は $1-(1/2)^k$ 近似解法となる．

2.3 MAX SAT 問題の 0.632 近似解法

MAX SAT 問題を最適化問題として定式化しよう．基本論理式を $a_1, a_2, \ldots, a_n$ とし，与えられたクローズの集合を $\Gamma = \{C_1, \ldots, C_m\}$ とし，クローズ C_j に与えられた非負の重みを w_j とする．

リテラル a_i に対し 0-1 変数 x_i を，リテラル $\overline{a_i}$ に対し 0-1 変数 x_{n+i} を導入する．基本論理式 a_i が真となるとき変数 x_i は 1 の値を x_{n+i} は 0 の値を取り， a_i が偽となるとき変数 x_i は 0 の値を x_{n+i} は 1 の値を取るとする．各クローズ C_j は，クローズに含まれるリテラルに対応する変数の添え字を要素とする集合と見なす．例えばクローズ C_j が $(a_1 \vee \overline{a_2} \vee \overline{a_3})$ であり $n = 10$ ならば， $C_j = \{1, 12, 13\}$ となっている．任意の添字 i に対して， $\bar{i}$ を

$$\bar{i} = \begin{cases} i + n & (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ i - n & (i \in \{n+1, \ldots, 2n\}), \end{cases}$$

と定める．

すると MAX SAT 問題は以下の 0-1 整数線形計画問題に定式化される．

$$\begin{array}{lll} \text{MS:} & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} w_j z_j \\ & \text{subject to} & z_j \le \displaystyle\sum_{i \in C_j} x_i, \\ & & x_i + x_{i+n} = 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \\ & & x_i \in \{0, 1\} \ (i = 1, 2, \ldots, 2n), \ \ z_j \in \{0, 1\} \ (j = 1, 2, \ldots, m), \end{array}$$

ただし変数 z_j はクローズ C_j の真偽を表わす 0-1 変数である．

上記の各変数の 0-1 制約を， 0 以上 1 以下という制約で置き換えてできる線形緩和問題を $\overline{\text{MS}}$ と書くことにする．線形緩和問題 $\overline{\text{MS}}$ の許容解 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ に対し，各基本論理式 a_i が， 確率 $\boldsymbol{x}_i$ で真となり， 確率 $\boldsymbol{x}_{i+n} = 1 - \boldsymbol{x}_i$ で偽となるとすると， クローズ C_j が真となる確率は $1 - \displaystyle\prod_{i \in C_j} x_{\bar{i}}$ となる．ゆえに，真となるクローズの重みの和の期待値は， $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} w_j \left(1 - \prod_{i \in C_j} x_{\bar{i}}\right)$ となる．このとき以下の性質が成り立つ．

補題 1 線形計画問題 $\overline{MS}$ の任意の許容解 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}$ は，任意のクローズ C_j に対し以下の不等式

$$1 - \prod_{i \in C_j} x_{\bar{i}} \ge (1 - (1 - 1/k)^k) z_i$$

を満たす，ただし k はクローズ C_j に含まれるリテラルの数である．

証明：相加相乗平均の不等式より，

$$1 - \prod_{i \in C_j} x_{\bar{i}} \quad \ge \quad 1 - \left(\frac{\sum_{i \in C_j} x_{\bar{i}}}{k}\right)^k = 1 - \left(\frac{\sum_{i \in C_j} (1 - x_i)}{k}\right)^k = 1 - \left(1 - \frac{\sum_{i \in C_j} x_i}{k}\right)^k \ge 1 - \left(1 - \frac{z_j}{k}\right)^k$$

となる．また $1 - (1 - z_j/k)^k$ は z_j に関する凹関数なので， $0 \le z_j \le 1$ を満たす z_j については

$$1 - \left(1 - \frac{z_j}{k}\right)^k \ge (1 - (1 - 1/k)^k) z_j$$

が成り立つ． ■

以下では，線形緩和問題 $\overline{\text{MS}}$ の最適解 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{z}^*)$ に対し，各基本論理式 a_i が， 確率 $\boldsymbol{x}_i^*$ で真となり， 確率 $\boldsymbol{x}_{i+n}^* = 1 - \boldsymbol{x}_i^*$ で偽となるとする．このとき，各クローズが最大 k 個しかリテラルを含まない MAX kSAT 問題について

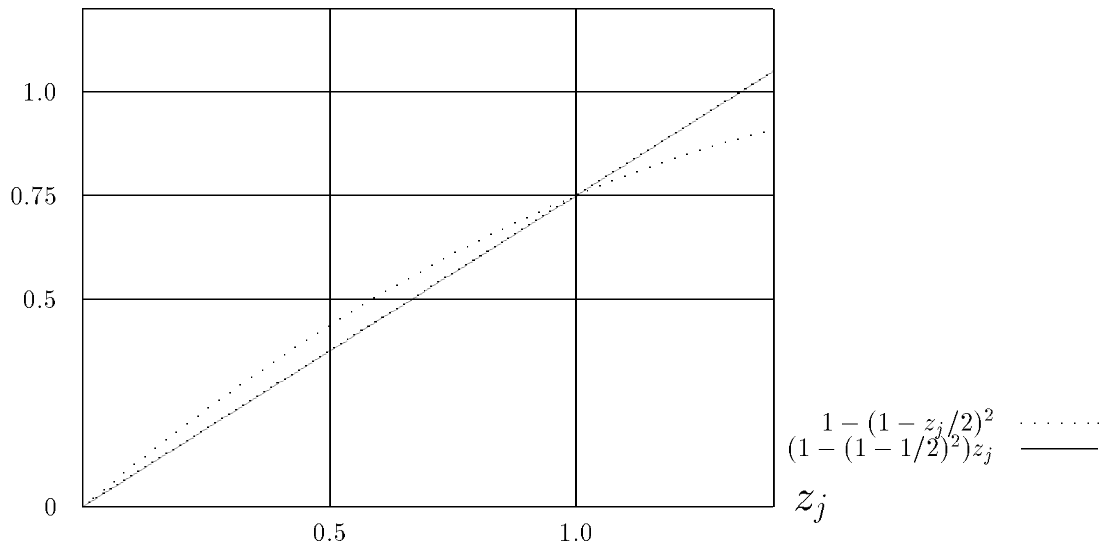

図 1: 関数 $1-(1-z_j/k)^k$ と $(1-(1-1/k)^k)z_j$ の関係、 ただし $k=2$ の場合.

議論する．任意の $k' \in \{1,2,\ldots,k\}$ について $(1-(1-1/k')^{k'}) \geq (1-(1-1/k)^k)$ が成り立つ事より，真となるクローズの重みの和の期待値は

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \left(1-\prod_{i\in C_j} x_{\bar{i}}^*\right) \geq \sum_{j=1}^{m} w_j(1-(1-1/k)^k)z_j^* = (1-(1-1/k)^k)\sum_{j=1}^{m} w_j z_j^*$$

を満たす．値 $\sum_{j=1}^{m} w_j z_j^*$ は線形緩和問題 $\overline{\text{MS}}$ の最適値であり，問題 MS の上界となっている．すなわち，上記の期待値は問題 MS の最適値の $(1-(1-1/k)^k)$ 倍以上となっている．ゆえに各基本論理式の真偽を $\boldsymbol{x}^*$ に従って振り分けるシミュレーションを何回も行なうことにより，問題 MS の最適値の $(1-(1-1/k)^k)$ 倍以上の目的関数値を与える真偽の割当を見つける事ができる．さらに，自然対数の底を e とすると、任意の正整数 k に対し $(1-(1-1/k)^k) > 1-1/e$ が成り立つ事から，上記の方法は MAX SAT 問題の $(1-1/e)$ 近似解法となっている．ちなみに $1-1/e = 0.632\cdots$ である．

2.4 MAX SAT 問題の 3/4 近似解法

Johnson の 1/2 近似解法と，前節の 0.632 近似解法について，クローズ内に含まれるリテラルの数で近似比率をまとめると，以下のようになる．

k	Johnson	0.632 近似解法
1	1/2=0.5	1
2	3/4=0.75	3/4=0.75
3	7/8=0.875	19/27=0.703$\cdots$
4	15/16=0.9375	175/256=0.684$\cdots$
$\vdots$		
k	$1-(1/2)^k$	$(1-(1-1/k)^k)$
$\vdots$		
∞	1	$1-1/e=0.632\cdots$

Johnson の方法はリテラルの多いクローズに力を発揮し，0.632 近似解法はリテラルの少ないクローズに力を発揮する．両方の近似比率が一致するのは $k = 2$ のときで，近似比率は 3/4 である．簡単な計算により次の不等式が成り立つ事が示される．

補題 2 任意の正整数 k に対して， $\dfrac{(1-(1/2)^k)+(1-(1-1/k)^k)}{2} \geq 3/4$ が成り立つ．

本節で提案する解法は，Johnson の 1/2 近似解法と前節の 0.632 近似解法の 2 つの方法を，等確率 (1/2) で選択して実行するというものである．リテラルを k 個含むクローズの集合を Γ^k とすると，上記の方法で真となるクローズの重みの総和の期待値は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\geq 1}\sum_{C_j\in\Gamma^k}\frac{w_j(1-(1/2)^k)+w_j\left(1-\prod_{i\in C_j}x^*_{\bar{i}}\right)}{2}\\
\geq\ & \sum_{k\geq 1}\sum_{C_j\in\Gamma^k}\left(\frac{(1-(1/2)^k)+(1-(1-1/k)^k)z^*_j}{2}\right)w_j \geq \sum_{k\geq 1}\sum_{C_j\in\Gamma^k}\left(\frac{(1-(1/2)^k)+(1-(1-1/k)^k)}{2}\right)z^*_j w_j\\
\geq\ & (3/4)\sum_{k\geq 1}\sum_{C_j\in\Gamma^k} z^*_j w_j = (3/4)\sum_{j=1}^{m} z^*_j w_j
\end{aligned}
$$

となり，線形緩和問題の最適値の 3/4 以上，すなわち問題 MS の最適値の 3/4 以上となる．

実際には２つの近似解法を等確率で実行させるのではなく、両方を実行させて良い方を解として採用すれば、同じかより良い解が得られる。

2.5 脱ランダム化

前節までは、各基本論理式の真偽を適当な確率で定めるシミュレーションを何回も行なうことにより，期待値以上の値を持つ解を求める事が出来るとしてきた。本節では、上記のようなシミュレーションに頼ること無く、ランダム性を排した算法（決定的な算法）で、期待値以上の値を持つ解を見つけるものについて述べる。

各基本論理式 a_i が， 確率 $\boldsymbol{x}_i$ で真となり， 確率 $\boldsymbol{x}_{i+n} = 1 - \boldsymbol{x}_i$ で偽となるとしたとき、真となるクローズの重みの和の期待値 $f(x_1, \ldots, x_n)$ は,

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{m} w_j \left(1 - \prod_{i\in C_j} x_{\bar{i}}\right)$$

となる．ここで、x_1 以外（すなわち変数 $x_2, \ldots, x_n$ を）ある値に固定し、関数 f を x_1 のみを変数とする 1 変数関数と捉えると、f は変数 x_1 の 1 次関数となっている。ゆえに、

$$0 \leq \forall x_1 \leq 1, \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \max\{f(0, x_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n), f(1, x_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)\}$$

が成立する。そこで $\max\{f(0, x_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n), f(1, x_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)\}$ を達成するように x_1 を 0 または 1 に固定すると、基本論理式 a_1 を， 真または偽に固定し、 真となるクローズの重みの和の期待値が $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 以上とする方法が見つかる。この方法を、次に x_2 に、さらに x_3 にと適用してゆくことにより、 真となるクローズの重みの和の期待値が $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 以上となるような、 基本論理式への真偽の割当を見つけることができる。

3 最大カット問題の 0.878 近似解法

3.1 最大カット問題

本節では最大カット問題の近似解法について扱う．最大カット問題とは以下のような問題である．無向グラフ $G = (V, E)$ と各枝 $e = \{i, j\} \in E$ に対し非負の枝重み $w_e = w_{ij} = w_{ji}$ が与えられているとする．頂点の部分集

合 $S \subseteq V$ に対するカット $(S, V \setminus S)$ を $(S, V \setminus S) = \{\{i,j\} \mid i \in S \not\ni j \text{ or } i \notin S \ni j\}$ と定義し，カットの重みを $w(S) = \sum_{e \in (S, V\setminus S)} w_e$ と定義する．最大カット問題は，重み最大のカットを求める問題である．

最大カット問題は NP- 困難であることが知られている．最大カット問題の 1/2 近似解法は簡単に作ることができる．各頂点を 1/2 の確率で選んだ頂点集合を S とすると， 任意の枝に対しその両端点の内ただ 1 つのみが S に入る確率は 1/2 となる．ゆえに，任意の枝に対しその枝が S に対するカットに含まれる確率は 1/2 であり， カットの重みの期待値は枝重みの総和の 1/2 となる．

3.2 最大カット問題の 0.878 近似解法

本節では d を任意の正整数として議論を進める．以下ではグラフの頂点集合を $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．座標空間 R^d の原点を中心とし半径 $1/\pi$ の球の表面を S とする．球面 S 上の任意の 2 点 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'$ に対し， 2 点を通る大円の弧のうち短い方の長さを $\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'}$ とする．

与えられたグラフ G の頂点を球面 S 上に配置する．このときグラフの各枝の重さと距離の積の総和を最大化するような 頂点の配置を求める問題を考える．正確には，以下のように記述される問題である．

$$\begin{array}{lll} \text{MC:} & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{\{i,j\} \in E} w_{ij} \ \widehat{\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_j} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{v}_i \in S \ \ (\forall i \in V). \end{array}$$

実はこの問題は最大カット問題と本質的に等しい．正確には以下が成り立つ．

定理 3 最大カット問題の最適解（の１つ）を $(S, V \setminus S)$ とする．球面 S 上の任意の点 $\boldsymbol{v}^*$ に対し，

$$\boldsymbol{v}_i^* = \begin{cases} \boldsymbol{v}^* & (i \in S), \\ -\boldsymbol{v}^* & (i \in V \setminus S), \end{cases}$$

と定義される解 $(\boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*)$ は問題 MC の最適解である．

証明：頂点配置 $(\boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*)$ に対する問題 MC の目的関数値は，球面 S 上の大円の半円弧の長さが 1 であることから，最大カット問題の最適値に等しい．

以下では， MC の任意の許容解 $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ に対し，その目的関数値が最大カット問題の最適値以下であることを示す．原点を境界に含む閉半空間 H に対し，点集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ のうち H に含まれるものに対応する頂点集合を $V(H)$ とする． また $V(H)$ に対応するカットを $C(H)$, カット $C(H)$ の重みを H に対応するカットの重みと呼ぶ．原点を境界に含む閉半空間 H をすべて等確率で発生させるとき，対応するカットの重みの期待値 z について議論しよう．定義から明らかに， z は最大カットの重み以下である．次に，許容解 $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ の目的関数値が， z となる事を証明する．グラフ中の枝 $\{i,j\}$ がカット $C(H)$ に含まれる確率は， $\boldsymbol{v}_i$ と $\boldsymbol{v}_j$ を結ぶ円弧の 2 倍の長さが，大円に対して占める割合であり， $\widehat{\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_j}$ である．ゆえに $z = \sum_{\{i,j\} \in E} w_{ij} \ \widehat{\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_j}$ となる． ■

以下では，頂点配置 $(\boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*)$ を最大カット配置と呼ぶ．

問題 MC は最大カット問題と本質的に同じであり, 依然として効率良く解く事は困難である．そこで以下では，2 点 $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j$ 間の距離を直線距離（ユークリッド距離）の 2 乗で置き換えた問題について議論する．球面 S 上の任意の 2 点 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'$ に対し， 2 点のユークリッド距離の 2 乗の $\pi^2/4$ 倍を $\overline{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'}$ と書く，すなわち $\overline{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'} = (\pi^2/4)||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'||^2$ である．ちなみに $\overline{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'} = (1/2)(1 - \pi^2 \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}')$ と書くこともできる．この距離は， $\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'} = 1$ の時， すなわち $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'$ が直径の両端となっているとき， $\overline{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'} = 1$ となるように設定されている．ゆえに，最大カット配置 $(\boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*)$ については， $\displaystyle\sum_{\{i,j\} \in E} w_{ij} \ \widehat{\boldsymbol{v}_i^* \boldsymbol{v}_j^*} = \sum_{\{i,j\} \in E} w_{ij} \ \overline{\boldsymbol{v}_i^* \boldsymbol{v}_j^*}$ が成り立つ．

ここで以下の問題について考える．

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{MC}}: \quad & \text{maximize} \quad && \sum_{\{i,j\}\in E} w_{ij}\ \overline{\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j} \\
& \text{subject to} \quad && \boldsymbol{v}_i \in S \ \ (\forall i \in V).
\end{aligned}
$$

距離 $\overline{\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j}$ の定義より，$\overline{\mathrm{MC}}$ の最適値はMCの最適値以上である事が分かる．距離 $\overline{\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j}$ の定義より，以下の性質が成り立つ事を示す事ができる．

補題 4 球面 S 上の任意の *2* 点 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'$ に対し，$\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'} \geq \left(\min_{0\leq\theta\leq\pi} \frac{2}{\pi}\frac{\theta}{1-\cos\theta}\right) \overline{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'}$ が成り立つ．またこのとき，$\min_{0\leq\theta\leq\pi} \frac{2}{\pi}\frac{\theta}{1-\cos\theta} > 0.878$ である．

証明：ベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}'$ のなす角を θ' とすると，$\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'} = \theta'/\pi$ と $\overline{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'} = (1-\cos\theta')/2$ となる事から明らか． ■

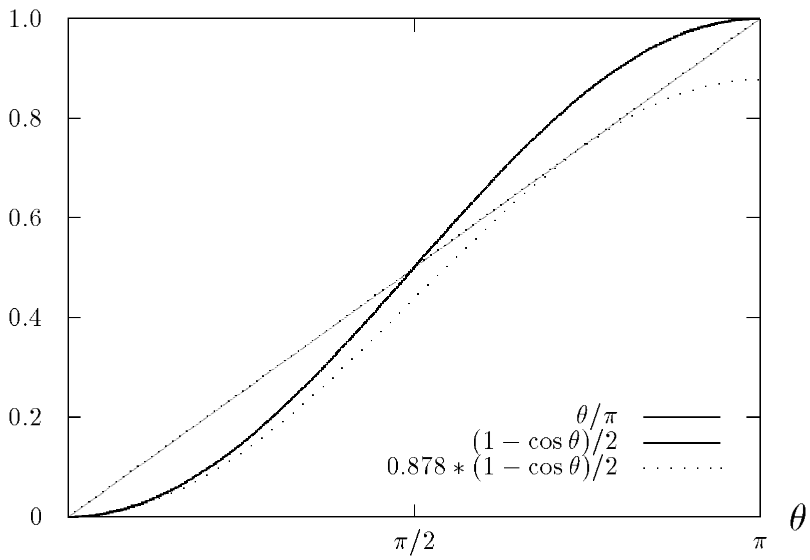

図 2: 関数 θ/π と $(1-\cos\theta)/2$ の関係.

上記補題より次の定理が成り立つ．

定理 5 問題 MC の最適解 $(\boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*)$ および問題 $\overline{MC}$ の最適解 $(\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n)$ に対し，

$$
\sum_{\{i,j\}\in E} w_{ij}\ \widehat{\boldsymbol{v}'_i\boldsymbol{v}'_j} \geq 0.878 \sum_{\{i,j\}\in E} w_{ij}\ \overline{\boldsymbol{v}'_i\boldsymbol{v}'_j} \geq 0.878 \sum_{\{i,j\}\in E} w_{ij}\ \overline{\boldsymbol{v}^*_i\boldsymbol{v}^*_j} = 0.878 \sum_{\{i,j\}\in E} w_{ij}\ \widehat{\boldsymbol{v}^*_i\boldsymbol{v}^*_j}
$$

が成り立つ．

上記の定理より，問題 $\overline{\mathrm{MC}}$ を解いて得られる配置では，MCの目的関数値が問題MCの最適値の0.878倍以上となっている．問題 $\overline{\mathrm{MC}}$ を解いて得られる配置に対して，定理3の証明で用いた手法に従い，原点を境界に含む半閉空間を等確率で発生させて得られるカットの重みの期待値は最大カットの0.878倍以上となっている．

3.3 半正定値計画

前節の近似解法を実行するには，問題 $\overline{\mathrm{MC}}$ を解く必要がある．距離 $\overline{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'}$ の定義から問題 $\overline{\mathrm{MC}}$ は

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{MC}}\text{-1}: \quad & \text{maximize} \quad && (1/2)\sum_{\{i,j\}\in E} w_{ij}(1-\pi^2\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j) \\
& \text{subject to} \quad && \boldsymbol{v}_i \in S \ \ (\forall i \in V),
\end{aligned}
$$

と書くことが出来る，上記の問題は制約式に凸 2 次不等式の入った 2 次計画であり，目的関数は凸とは限らない．

以下では，この問題が半正定値計画に変形される事を示す．変数 y_{ij} $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$ を導入し，$y_{ij} = \pi^2 \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j$ と変数変換を行なうと，行列 $Y = (y_{ij})$ は次の性質；(1) $\forall i \in V,\ y_{ii} = 1$，(2) Y は半正定値対称行列，を満たす．これより以下の問題

$$\begin{array}{lll} \overline{\mathrm{MC}}\text{-2:} & \text{maximize} & (1/2) \displaystyle\sum_{i,j \in E} w_{ij}(1 - y_{ij}) \\ & \text{subject to} & y_{ii} = 1 \ \ (\forall i \in V), \\ & & Y = (y_{ij}) \text{は半正定値対称行列}, \end{array}$$

は $\overline{\mathrm{MC}}$-1 の緩和問題となる．すなわち $\overline{\mathrm{MC}}$-2 の最適値は $\overline{\mathrm{MC}}$-1 の最適値以上である． $\overline{\mathrm{MC}}$-2 の最適解 Y^* としたとき，$(1/\pi^2)Y^*$ を Cholesky 分解することにより，$(1/\pi^2)Y = X^t X$ が得られたとする．問題 MC を定義した座標空間の次元 d を， 行列 X の行数とすると， X の列ベクトル集合は問題 $\overline{\mathrm{MC}}$-1 の許容解となり，目的関数は $\overline{\mathrm{MC}}$-2 の最適値と一致する．ゆえに，X の列ベクトル集合は問題 $\overline{\mathrm{MC}}$-1 の最適解である．

上記の半正定値計画には，効率的な算法があることが知られている．

4 MAX 2SAT 問題の 0.878 近似解法

前節の手法は以下の問題にもそのまま適用できる．まず最初に，制約付き最大カット問題について議論する．無向グラフ $G = (V, E)$ と非負の枝重み w および， 枝の部分集合 E' が与えられたとき， E' を含むカットの中で重み最大のものを求める問題を制約付き最大カット問題と呼ぶ．この問題は前節の問題 MC に以下の等式

$$\widehat{\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_j} = 1 \ \ (\forall \{i, j\} \in E'),$$

を加えて表される．すると前節と同様の議論を行なうことにより， 0.878 近似解法を作ることができる．また最終的に作られる半正定値問題では，

$$y_{ij} = y_{ji} = 1 \ \ (\forall \{i, j\} \in E'),$$

という制約式が付け加わる事となるが，これも効率的に解くことができる．

最後に MAX 2SAT 問題を，上記の制約付き最大カット問題に変形する．基本論理式の集合 $a_1, \ldots, a_n$，クローズの集合 $\Gamma = \{C_1, \ldots, C_m\}$，クローズの重み w'_j $(j \in \{1, \ldots, m\})$ が与えられたとする．ただしクローズは，第 2.3節で定義したように，それに含まれるリテラルの添字集合と見なす．このとき <u>完全グラフ</u> $G = (V, E)$ と枝集合 E' を

$$V = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n\}, \quad E' = \{\{i, n+i\} \mid i = 1, 2, \ldots, n\},$$

と定義し，さらに枝重み w_e を

$$w_e = \begin{cases} (1/2) w'_l & (\text{if } 0 \notin e \text{ and } e = C_l), \\ (1/2) \displaystyle\sum_{C_l \ni j} (3 - |C_l|) w'_l & (\text{if } 0 \in e \text{ and } e = \{0, j\}), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

と定義する．上記の枝重み $w(e)$ は次の手続きでも作ることが出来る．まず最初は全ての枝重みを 0 とする．各クローズ C_l について，(1) $C_l = \{i\}$ すなわちリテラルが 1 個ならば，枝 $\{0, i\}$ の重みを w_l 増やす，(2) $C_l = \{i, j\}$ すなわちリテラルが 2 個ならば，頂点 $\{0, i, j\}$ からなる長さ 3 のサイクル上の枝の重みをそれぞれ $(1/2)w_l$ 増やす．

このとき E' を含むカットを $(S, V \setminus S)$ とし，一般性を失うこと無く $0 \in S$ と仮定すると，$V \setminus S$ に含まれる頂点に対応する基本論理式を真としたとき，真となるクローズの重みの合計はカットの重みに等しい．逆に任意の真偽の割当に対して，上記の逆の手続きで得られるカットの重みは，真となるクローズの重みの合計に等しい．ゆえに上記の手続きで MAX 2SAT 問題を制約付き最大カット問題に変形することができる．

参考文献

[1] D.S.Johnson, Approximation Algorithms for Combinatorial Problems, J.Comp.Sys.Sci., 9 (1974), 256-278.

[2] M.X.Goemans and D.P.Williamson, New 3/4 approximation algorithms for the maximum satisfiability problem, SIAM J.Disc.Math., 7 (1994), 656-666.

[3] M.X.Goemans and D.P.Williamson, .878-Approximation algorithms for MAX CUT and MAX 2SAT, STOC 1994, Montreal, Quebec, Canada, 422-431.

[4] M.X.Goemans and D.P.Williamson, Improved approximation algorithms for maximum cut and satifiability problems using semidefinite programming, J. ACM, 42 (1995), 1115-1145.