フーリエ級数と直交基底の考察

bear56

2007年9月26日

目次

1　フーリエ級数の考察

フーリエ級数とは，$-\pi$ から π の間で定義された実関数 $f(x)$ を，三角関数の線形結合で表すものであるが，簡単のために，三角関数の代わりにオイラーの関係式を用いて，

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imx} \tag{1}$$

と仮定する．係数 C_m は複素定数で，

$$C_m = a_m - ib_m,\ \ C_{-m} = C_m^* = a_m + ib_m,\ \ b_0 = 0.$$

ここで，a_m, b_m は実数である．(1) を展開すると，

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imx} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{-m}e^{-imx} + C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{imx}\right) \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m^* e^{-imx} + C_m e^{imx}\right) \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[(a_m + ib_m)(\cos mx - i\sin mx) + (a_m - ib_m)(\cos mx + i\sin mx)\right] \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx + b_m\sin mx) \qquad (2)
\end{aligned}$$

実係数の式 (2) となる．

2　直交基底の考察

次に，基底ベクトルの性質について調べる．基本は以下の積分である．

$$I_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}e^{-inx}dx = 2\pi\delta_{mn}\begin{cases}0 & (m \neq n)\\ 2\pi & (m = n)\end{cases} \tag{3}$$

ここで，δ_{mn} はクロネッカーのデルタであり，e_j, e_k を単位直交基底ベクトルとすると，その内積は，

$$e_j \cdot e_k = \delta_{jk} = \begin{cases}0 & (j \neq k)\\ 1 & (j = k)\end{cases} \tag{4}$$

(3) の積分 I_{mn} を，ベクトル e^{imx} に対する内積の定義と見做せば，I_{mn} は直交関係を表す．
2 つのベクトルが直交しているとき，その内積は 0 になる．つまり，ここで，ベクトル e^{imx} は，
内積を **“e^{-inx} を掛けて $-\pi$ から π まで積分する”** と定義することで，直行基底となる．

3　フーリエ係数の導出

ここで定義した内積を利用して，(1) の係数 C_m を求める．
(1) の両辺に e^{-inx} を掛けて $-\pi$ から π まで積分すると，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imx}\right)e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m 2\pi\delta_{mn} \\ &= \pi C_n. \end{aligned} \tag{5}$$

m が全ての整数をわたるとき，δ_{mn} が 0 でなくなるのは $m = n$ のときだけである．よって，C_n だけが残る．
(5) の両辺を π で割り，C_n について解くと，

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{6}$$

複素係数の式 (6) が得られる．また，実係数 a_n, b_n は，(6) より，

$$\begin{aligned} C_n &= a_n - ib_n \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx \end{aligned} \tag{7}$$

実部と虚部の比較から，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx \tag{8}$$

実係数の式 (8) が得られる．

4　フーリエ級数の表現

よって，フーリエ級数の複素表現と実表現の 2 つを得た．

1. 複素表現

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}, \quad C_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{9}$$

2. 実表現

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx \tag{10}$$

- 複素表現は，何より簡潔であり，指数関数の特性から微積分が容易で，係数を求めるのに便利である．
- 実表現は，週関数 cos と奇関数 sin とで表していることから，
  - ・$f(x)$ が週関数なら係数 $b_m = 0$
  - ・$f(x)$ が奇関数なら係数 $a_m = 0$

  となることが直ちに解り，見通しのよい計算が出来る．
- $f(x)$ の週奇性を判別できない場合は，複素表現で係数を求め，三角関数に分割する手順が便利である．

5　三角関数の直交関係

三角関数の直交関係についても，考察しておく．(3) の直交関係から，

$$
\begin{aligned}
I_{mn} = 2\pi\delta_{mn} &\begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 2\pi & (m = n) \end{cases} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{imx} dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx - i \sin nx)(\cos mx + i \sin mx) dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[(\cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx) + i(\sin mx \cos nx - \cos mx \sin nx) \right] dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx) dx + i \int_{-\pi}^{\pi} (\sin mx \cos nx - \cos mx \sin nx) dx
\end{aligned}
$$

実部と虚部の比較と，m, n の関係により，以下の三角関数の直交関係が導かれる．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \ \cos nx \ dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n \neq 0) \\ 2\pi & (m = n = 0) \end{cases} \tag{11}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \ \sin nx \ dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n \neq 0) \\ 0 & (m = n = 0) \end{cases} \tag{12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \ \cos nx \ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \ \sin nx \ dx = 0 \tag{13}$$

6　おわりに

なお，本考察には，文献 [1] を参考にした．

参考文献

[1] 吉田武. オイラーの贈物. ちくま学芸文庫. 筑摩書房, 2001.