複素係数二次方程式と解の公式の考察

bear56

2007 年 9 月 29 日

目次

1　二次方程式の解法

　x の二次方程式の解法について考える．

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \tag{1}$$

この式が，一次式の積に因数分解できる場合，

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \tag{2}$$

このとき，

$$x - \alpha = 0,\ \text{または}\ x - \beta = 0 \tag{3}$$

と分割でき，解 $x = \alpha, \beta$ を得る．

2　二次方程式の解の公式の導出

　次に，二次方程式の解を，その係数で表す式を導く．
(1) の両辺を a で割り，$(b/2a)^2$ を足し引きして完全平方式を作る．

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\
&= x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}.
\end{aligned} \tag{4}$$

移行して，整理すると，

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{5}$$

開平して，

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{6}$$

x について整理して，二次方程式の解の公式 (7) を得る．

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{7}$$

ここで，求めた解 α, β と，係数 a, b, c の間には，次の関係が成り立つ．

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{8}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \tag{9}$$

3　複素係数の場合の考察

ここまで，係数は実数であるとは言及しておらず，式操作の過程においても，係数を複素数として不具合はない．条件は $a \neq 0$ だけである．

したがって，複素係数二次方程式についても，解の公式 (7) が適用できる．むしろ，係数は複素数と考えるほうが自然で，実係数はその特殊な場合だと言える．

なお，解の公式 (7) には根号が含まれるが，複素係数と実係数とで，状況が異なる．

- 複素係数の場合
  係数が複素数であれば，無造作に平方根を求められる．
  虚数単位 $\sqrt{-1} = i$，つまり，複素数の定義により，これが可能である．
  複素数の平方根は，2 つ求まるが，(7) の形式から，一方を取れば十分である．
  複素数 $z = b^2 - 4ac$ として，

$$
\begin{aligned}
&z = u + iv,\ z^* = u - iv \quad (u, v \text{ は実数}) \\
&r = |z| = \sqrt{z\,z^*} = \sqrt{u^2 + v^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{v}{u}
\end{aligned}
$$

  とすると，極座標表示で，

$$
z = r\,e^{i\theta} = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)\,.
$$

  その平方根は，

$$
z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}}\,e^{i\frac{\theta}{2}} = \pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right).
$$

- 実係数の場合
  係数が実数であれば，解の判別式を $D = b^2 - 4ac$ として，以下の 3 つの場合を考慮する必要がある．
  $D > 0$：解は 2 つの実数
  $D = 0$：解は 1 つの実数（重解）
  $D < 0$：解は 2 つの虚数（共役複素数）

4　おわりに

なお，本考察には，文献 [1] を参考にした．

参考文献

[1] 吉田武. オイラーの贈物. ちくま学芸文庫. 筑摩書房, 2001.