“負×負＝正” の考え方

bear56

2007 年 10 月 6 日

目次

1 **はじめに** 2

2 $(-1) \times (-1) = 1$ **の理由** 2

3 **ベクトルの回転** 3

4 **おわりに** 3

1　はじめに

子供の頃，“負×負＝正” の意味が理解できず，そういうものだと思い込んでいた．
しかし，ベクトルという概念を学んでから，漸く理解できるようになった．

2　$(-1) \times (-1) = 1$ の理由

数直線上で考えてもピンとこないが，複素平面上のベクトルで考えると解り易い．
まず，-1 を複素平面上で極座標形式で表す．オイラーの公式 [1] $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ から，

$$
\begin{aligned}
e^{i\pi} &= \cos\pi + i\sin\pi \\
&= -1 + i0 \\
\therefore e^{i\pi} &= -1. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
(-1) \times (-1) &= e^{i\pi}\, e^{i\pi} \\
&= e^{2i\pi} \\
&= \cos 2\pi + i\sin 2\pi \\
&= 1 + i0 \\
\therefore (-1) \times (-1) &= 1. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

数式的には，このようになるが，言葉で説明するなら，
実軸上で負の方向を向いている大きさ 1 のベクトル $e^{i\pi}(= -1)$ に，$e^{i\pi}(= -1)$ を掛けると，ベクトル $e^{i\pi}(= -1)$ が π[rad] 回転して，正の方向を向く大きさ 1 のベクトル $e^{2i\pi}(= 1)$ となる．
同様に，

$$
\begin{aligned}
1 \times (-1) &= e^{0}\, e^{i\pi} \\
&= e^{i\pi} \\
&= \cos\pi + i\sin\pi \\
&= -1 + i0 \\
\therefore 1 \times (-1) &= -1. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

実軸上で正の方向を向いている大きさ 1 のベクトル $e^{0}(= 1)$ に，$e^{i\pi}(= -1)$ を掛けると，ベクトル $e^{0}(= 1)$ が π[rad] 回転して，負の方向を向く大きさ 1 のベクトル $e^{i\pi}(= -1)$ となる．
つまり，“-1 を掛けることは，ベクトルを π[rad] 回転すること” である．
ここで，数直線上に話を移すと，“-1 を掛けることは，正負を反転すること” となる．

3　ベクトルの回転

さらに，$(-a)\times(-b)=ab$ について，

$$
\begin{aligned}
(-a)\times(-b) &= [a\times(-1)]\times[b\times(-1)] \\
&= a\,e^{i\pi}\,b\,e^{i\pi} \\
&= ab\,e^{i\pi}\,e^{i\pi} \\
&= ab\ \ e^{2i\pi} \\
&= ab\,(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) \\
&= ab\,(1+i0) \\
\therefore (-a)\times(-b) &= ab. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

もっと，一般的には，ベクトル $a\,e^{i\phi}$ に，$b\,e^{i\theta}$ を掛けると，

$$a\,e^{i\phi}\,b\,e^{i\theta} = ab\,e^{i(\phi+\theta)}. \qquad (5)$$

つまり，$e^{i\theta}$ を掛けることは，ベクトルを θ 回転させることになる．
特に $-1=e^{i\pi}$ を掛けることは，π[rad] 回転させることになる．

4　おわりに

今でも，ベクトルを知らない子供に説明する時には，苦労する．
ちなみに，子供に教える場合，

$$
\begin{array}{rcccr}
3 & \times & 1 & = & 3 \\
2 & \times & 1 & = & 2 \\
1 & \times & 1 & = & 1 \\
0 & \times & 1 & = & 0 \\
-1 & \times & 1 & = & -1 \\
-2 & \times & 1 & = & -2 \\
-3 & \times & 1 & = & -3
\end{array}
$$

これと同様に，

$$
\begin{array}{rcccr}
3 & \times & (-1) & = & -3 \\
2 & \times & (-1) & = & -2 \\
1 & \times & (-1) & = & -1 \\
0 & \times & (-1) & = & 0 \\
-1 & \times & (-1) & = & 1 \\
-2 & \times & (-1) & = & 2 \\
-3 & \times & (-1) & = & 3
\end{array}
$$

このような “決め事がある” とするのが自然だろうか．

参考文献

[1] 吉田武. オイラーの贈物. ちくま学芸文庫. 筑摩書房, 2001.