表現論大意

翁　林 氏（九大数理）

2007 年度前期九州大学数理学府、表現論大意
筆記：平之内俊郎

1　類体論

K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする．（局所）類体論により, K 上の Abel 拡大, 及びその分岐の様子を記述する事が出来る. 例えば $K=\mathbb{Q}_p$ ならば, 一の冪根を添加して出来る円分体により, またより一般的には形式群の等分点を添加する事で最大 Abel 拡大 K^{ab} を K から構成することが出来た. 従て Galois 群 $G_K^{\mathrm{ab}} := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ を代数的に捉えることが可能と成る. ここでは, Abel とは限らない絶対 Galois 群 G_K を K から復元させて, 全ての K 上の拡大を考えたい.

2　Colmez-Fontaine の復習

K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大, $\mathbb{F}_q$ をその剰余体 $(q:=p^{f_0})$ とし, $K_0 := \mathrm{Frac}\,(W(\mathbb{F}_q))$ とする．ここで W(体) は Witt ベクトル環を表す．また σ で Frobenius $W(\mathbb{F}_q)\to W(\mathbb{F}_q)$ から誘導される K_0 上の Frobenius を表す.

定義 2.1. 有限次元 K_0 線型空間 D_0 が φ **加群** であるとは, ある σ 半線型写像 $\varphi: D_0\to D_0$ が存在する事. 即ち,
(i) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ $(x,y\in D_0)$,
(ii) $\varphi(\lambda x)=\sigma(\lambda)\varphi(x)$ $(\lambda\in K_0,\ x,y\in D_0)$.

補題 2.2 (Dieudonné, *cf.* [Tot96], Lem. 1)**.** φ 加群 D_0 に対し,

$$D_0=\bigoplus_{l\in\mathbb{Q}}(D_0)_l.$$

ここで $(D_0)_{s/r}$ は K_0 上の φ^r の p^s 固有空間 $(r,s\in\mathbb{Z},(r,s)=1,r>0)$ (K の剰余体が代数閉体なら $(D_0)_l=\{x\mid \varphi^r x=p^s x\}$ と書ける).

φ 加群 D_0 に対し,

$$\mu_N(D):=\mu_N(D_0):=\sum_{l\in\mathbb{Q}} l\dim_{K_0}((D_0)_l)\quad (D:=D_0\otimes_{K_0}K)$$

を D_0 の **Newton slope** と言う (*cf.* [FO], Def. 7.40, Rem. 7.47).

定義 2.3 ([FO], Def. 7.33)**.** φ 加群 D_0 が (φ, N) **加群** であるとは, K_0 線型写像 $N : D_0 \to D_0$ が存在して, $N\varphi = p\varphi N$ を満たす事.

(φ, N) 加群の圏は Abel 圏を成し, 自明な (φ, N) 加群 K_0 を始対象にもつ. $D_0 \otimes D_0' := D_0 \otimes_{K_0} D_0'$ によるテンソル圏の構造を入れるには, φ が全単射なる (φ, N) 加群の成す充満部分圏に制限する. この時, D_0 は **φ-isocrystal** と呼ばれ ([FO], Rem. 7.47), N は冪零 ($N^{冪} = 0$) である ([FO], Prop. 7.43).

定義 2.4. (φ, N) 加群 D_0 が K 上の **フィルター付き** (φ, N) **加群 (filtered** (φ, N)**-module)** であるとは, $D := D_0 \otimes_{K_0} K$ に次の様な K 部分線型空間のなすフィルトレイション $\mathrm{Fil}^i D$ $(i \in \mathbb{Z})$ が入る事:
(H1) $\mathrm{Fil}^{i+1} D \subset \mathrm{Fil}^i D$ (decreasing),
(H2) $\cap_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^i D = 0$ (separated),
(H3) $\cup_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^i D = D$ (exhaustive).

上のフィルトレーション Fil^i を **Hodge フィルトレーション** と言い, 場合によっては Fil_H と書く. また

$$\mathrm{gr}\,^i_H D := \mathrm{gr}\,^i D := \mathrm{Fil}^i D / \mathrm{Fil}^{i+1} D$$

と置き,

$$\mu_H(D_0) := \mu_H(D) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} i \dim_K(\mathrm{gr}\,^i_H D)$$

を **Hodge slope** と呼ぶ (*cf.* [FO], Def. 7.44, Prop. 7.45). フィルター付き (φ, N) 加群 D_0' が D_0 の **部分フィルター付き** (φ, N) **加群**であるとは, D_0' は D_0 の K_0 部分線型空間であり, $D' := D_0' \otimes_{K_0} K$ に対し $\mathrm{Fil}^i D' = \mathrm{Fil}^i D \cap D'$ なる事. これを $D' \le D$ と書く.

定義 2.5. K 上のフィルター付き (φ, N) 加群 D_0 が **許容 (admissible)** である（昔の用語では **弱許容 (weakly admissible)**, [FO], Rem. 7.55）とは, φ が全単射であって次を満たす事を言う:
(i) $\mu_H(D) = \mu_N(D)$,
(ii) 任意の $D' \le D$ に対し, $\mu_H(D') \le \mu_N(D')$.

許容フィルター付き (φ, N) 加群の圏 $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{ad}}(\varphi, N)$ は淡中圏の構造を持つ ([Tot96]). また G_K の半安定表現の成す圏を $\mathbf{Rep}^{\mathrm{st}}(G_K)$ とする.

定理 2.6. (i) (Fontaine) $\rho : G_K \to \mathrm{GL}(V)$ を半安定表現としたとき,

$$\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) := (B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$

は許容フィルター付き (φ, N) 加群.
(ii) (Colmez-Fontaine, [CF00]) 許容フィルター付き (φ, N) 加群 D_0 に対し, G_K の半安定表現 V が存在して $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \simeq D_0$. 更に,

$$\mathbf{D}_{\mathrm{st}} : \mathbf{Rep}^{\mathrm{st}}(G_K) \to \mathbf{MF}_K^{\mathrm{ad}}(\varphi, N)$$

は淡中圏の圏同値.

$\mathbf{Rep}^{\mathrm{st}}(G_K)$ の淡中基本群が K の絶対 Galois 群 G_K と一致したと仮定する. $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{ad}}(\varphi, N)$ は K から代数的に構成したものであるので, 上の定理は類体論の非可換版, 及び圏同値は「相互写像」と考えることが出来る. しかしながら, よくよく上の圏の定義を見てみると, 局所体 K と言うよりは K_0 から構成されていて, K の分岐の様子を全く反映していない事が分かる. 即ち上の定理は古典的な Hilbert 類体論 (不分岐類体論) の非可換化と考えるべきであろう. そこでもう少し表現の条件を緩くして, de Rham 表現の成す圏 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{dR}}(G_K)$ を考察してはどうだろうか. de Rham 表現 = 潜在的半安定表現 (Berger) だったから, この「潜在的」の部分に分岐の情報が詰まっていて, これから確かめるように G_K を復元するにはこれで十分である.

定義 2.7 ([FO], Def. 7.61)**.** L/K を有限次 Galois 拡大とし, $G_{L/K} := \mathrm{Gal}(L/K)$ とする. $G_{L/K}$ 作用付き有限次元 L_0 線型空間 $D_{0,L}$ が **フィルター付き** $(\varphi, N, G_{L/K})$ **加群** であるとは, $D_{0,L}$ が (φ, N) 加群であって, $(L \otimes_{L_0} D_{0,L})^{G_{L/K}}$ は, K 上のフィルター付き (φ, N) 加群.

フィルター付き $(\varphi, N, G_{L/K})$ 加群の圏を $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{ad}}(\varphi, N, G_{L/K})$ とし, L に関して極限を取ることで定理 2.6 から圏同値

$$\mathbf{Rep}^{\mathrm{dR}}(G_K) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{MF}_K^{\mathrm{ad}}(\varphi, N, G_K) \tag{1}$$

勿論, 現在の目的の為にはこれでは不十分である. 実際 G_K を代数的に構成したいのに, $G_{L/K}$ (の作用) を使って圏 $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{ad}}(\varphi, N, G_{L/K})$ を構成しているからである. つまり問題は $G_{L/K}$ なる有限次拡大の Galois 作用の部分を代数的に捉える, という問題になった. 次節では Galois 作用の代わりに ω **構造** を (φ, N) 加群に加えて, 圏 $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{ad}}(\varphi, N, \omega)$ を定義し, (1) の $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{ad}}(\varphi, N, G_K)$ を代数的に構成する事を試みる. これが完成して定理 2.6 の de Rham 表現版が得られれば, 目的の類体論が得られる筈である. この形の「相互写像」をここでは（何故か）**極小相互写像 (micro reciprocity map)** と言う.

3 ω 構造

前節の最後で述べたようにここでは, 有限次拡大 L/K の Galois 群 $G := G_{L/K}$ の表現の分岐を代数的に記述したい. ここでは古典的な類体論でも用いた Artin 導手の理論を抽象化することで, ω 構造を定義する. まず G の上付き分岐群 G^r $(r \geq -1)$ は右連続, 即ち $G^{r-} := \cap_{s<r} G^r = G^r$ であり, L/K が Abel 拡大ならば, その跳躍数 ($G^r \neq G^{r+} := \cup_{s>r} G^s$ なる r) は整数であったことに注意する. 今 G の p 進表現 $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(V)$ に対して, $\mathrm{Fil}^r V := V^{G^r}$ なる V のフィルトレーションを考える. 今,

$$\mathrm{Fil}^{r+} V = \bigcap_{s>r} \mathrm{Fil}^s V = V^{G^{s+}}, \ \mathrm{Fil}^{r-} V = \bigcup_{s<r} \mathrm{Fil}^s V = V^{G^{s-}}, \ \mathrm{gr}^r V = \mathrm{Fil}^{r+} V / \mathrm{Fil}^{r-} V.$$

と置けば, Artin 導手 $c(\rho)$ は

(2) $$c(\rho) = \sum_{r\geq 0} r \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{gr}^{\,s-1}V)$$

と書け, 更に $\mathrm{Fil}^r V$ は次を満たす:
(単調増大) 任意の $\delta > 0$ に対し $\mathrm{Fil}^r_\omega D \subset \mathrm{Fil}^{r+\delta}_\omega D$,
(完備) $\cup_{r\geq -1} \mathrm{Fil}^r V = V$,
(右連続) $\cap_{s>r} \mathrm{Fil}^s D = \mathrm{Fil}^r D$,
(Hasse-Arf の定理) $\mathrm{Fil}^r V$ の跳躍数は $r \in \mathbb{Q}$,
(Artin の定理) $c(\rho) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

こうした事実を踏襲して（尚且つ (2) を鑑みて指数 r を 1 つずらして）(φ, N) 加群に次のようなフィルトレーションの構造を導入する.

定義 3.1. フィルター付き (φ, N) 加群 D_0 が (または $D := D_0 \otimes_{K_0} K$ が) (φ, N, ω) 加群であるとは, D に, 次の条件を満たす ω **フィルトレーション** $\mathrm{Fil}^r_\omega D$ が存在する事を言う:
(O0) $\mathrm{Fil}^r_\omega D$ は D の K 部分線型空間 $(r \geq 0)$,
(O1) (単調増大) 任意の $\delta > 0$ に対し $\mathrm{Fil}^r_\omega D \subset \mathrm{Fil}^{r+\delta}_\omega D$,
(O2) (完備) $\cup_{r\geq 0} \mathrm{Fil}^r_\omega D = D$,
(O3) (右連続) $\mathrm{Fil}^{s+}_\omega D = \mathrm{Fil}^r_\omega D$,
(O4) 跳躍数は $r \in \mathbb{Q}$,
(O5) $\mu_\omega(D) := \sum_{r\geq 0} r \dim_K(\mathrm{gr}^{\,r}_{\,\omega} D) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

この定義の $\mu_\omega(D)$ を D の ω**-slope** と呼ぶ. 上の考察から分かるようにこれは古典的な Artin 導手に対応して, 表現の分岐を測る.

次に, de Rham 表現 V から (φ, N, ω) 加群を構成しよう. 今 $\overline{K}^{(r)} := \overline{K}^{G_K^{(r-1)+}}$ とする. P. Colmez ([Col]) は 「overconvergent of valuation」により, B_{dR} 内のフィルトレーション $B^{(r)}_{\mathrm{dR}}$ を定義し, 次を示した.

定理 3.2. $B^{(r)}_{\mathrm{dR}} \cap \overline{K} = \overline{K}^{(r)}$.

即ち, 代数的に定義された $B^{(r)}_{\mathrm{dR}}$ から分岐群を復元する事が出来る. これによって $D_{\mathrm{dR}}(V) := (B^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ に ω フィルトレーション $\mathrm{Fil}^r_\omega D_{\mathrm{dR}}(V) := (B^{(r)}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ の構造が入り, 関手

$$D_{\mathrm{dR}} : \mathbf{Rep}^{\mathrm{dR}}(G_K) \to \mathbf{MF}_K(\varphi, N, \omega)$$

が定義された. Colmez-Fontaine の時と同様にこの関手の像を更に次のように制限する.

定義 3.3. フィルター付き (φ, N, ω) 加群 D が次を満たす時, **半安定 (semi-stable)** であると言う:
(i) $\mu_H(D) = \mu_N(D) + \mu_\omega(D)$,
(ii) 任意の $D' \leq D$ に対し, $\mu_H(D') \leq \mu_N(D') + \mu_\omega(D')$.

半安定フィルター付き (φ, N, ω) 加群の圏を $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{st}}(\varphi, N, \omega)$ として, 次の予想が最終目的であった極小相互法則及び非可換類体論である.

予想 3.4. (i) $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{st}}(\varphi, N, \omega)$ は淡中圏.
(ii) $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{st}}(\varphi, N, \omega)$ の有限生成部分淡中圏の集合と, K の有限次 Galois 拡大の集合は一対一対応する.

何故, フィルター付き (φ, N, ω) 加群に定義 3.3 の様な条件を課したのか, 何故, 上の予想が成り立つと期待されるのか, を簡単に述べると Colmez-Fontaine がコンパクト Riemann 面の非可換類対論の数論幾何的類似であって, 上の予想が開 Riemann 面の非可換類体論の類似となるからである. 次節ではこうした幾何学的背景について述べたい.

4 Riemann 面の非可換類体論

see [Wen].

参考文献

[CF00] Pierre Colmez and Jean-Marc Fontaine, *Construction des représentations p-adiques semi-stables*, Invent. Math. **140** (2000), no. 1, 1–43. MR MR1779803 (2001g:11184)

[Col] Pierre Colmez, *Conducteur d'Artin d'une représentation de de Rham*, preprint.

[FO] Jean-Marc Fontaine and Yi Ouyang, *Theory of p-adic Galois representations.*

[Tot96] Burt Totaro, *Tensor products in p-adic Hodge theory*, Duke Math. J. **83** (1996), no. 1, 79–104. MR MR1388844 (97d:14032)

[Wen] Lin Weng, *Non-abelian class field thoery for Riemann surfaces*, (preprint) math.AG/0111240.