テータ関数の不思議な公式

成川淳

数学や物理学の分野に登場する特殊関数の中で，私が特に興味を持っているのがヤコビのテータ関数 $\theta(z,\tau)$ です。この関数はパラメータを持つ複素関数で，多くの興味深い性質や関係式を持っています。今回はテータ関数のモジュラー変換式について，留数定理による証明を紹介します。ほとんど知られていない証明ではありますが，美しく優れた証明です。

1　美しさと醜さを持つ式

テータ関数は変数 $z \in \mathbb{C}$ とパラメータ $\tau \in \mathbb{C}$ $(\operatorname{Im}\tau > 0)$ に対して定義されます。定義にはいくつかの方法があるのですが，今回は次の定義を紹介します。

$$\theta(z,\tau) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\{(n+1/2)^2\tau+(2n+1)(z+1/2)\}} \qquad (z,\tau \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}\tau > 0)$$

$\operatorname{Im}\tau > 0$ の条件により $|e^{\pi i\tau}| < 1$ ですので，この無限級数は絶対収束し，z について正則となります。有名な性質として，擬周期性や微分関係式，無限積表示などがありますが，今回注目したいのは，モジュラー変換式またはヤコビ変換式と呼ばれる次の式です。

$$\theta\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = -i\sqrt{-i\tau}\ e^{\pi i z^2/\tau}\ \theta(z,\tau) \tag{1}$$

私は初めてこの式を見て,「気持ち悪い式だな」と思いました。左辺を見てまず，$\operatorname{Im}\tau > 0$ ならば $\operatorname{Im}\left(-\frac{1}{\tau}\right) > 0$ なので，左辺は関数の定義としては問題ないなと確認できます。次に，パラメータを引っくり返した左辺が，右辺のように元の関数で書けるのは美しいなと感心します。しかし，$-i\sqrt{-i\tau}$ という項と $e^{\pi i z^2/\tau}$ という項が何者なのかわからず，気持ち悪いという印象が私には残りました。見る人によっては，この式を単に美しいとだけ感じるかもしれません。しかし，例えば，$\theta(z,\tau)$ の定義の仕方によっては $-i\sqrt{-i\tau}$ の項と $e^{\pi i z^2/\tau}$ の項は解消できるのか，また，どのような証明が直接的なのか等，疑問が多く残ります。

(1) の一般的な証明の 1 つに，零点の情報や擬周期性を用いて $\theta(z,\tau)\theta\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)^{-1}$ の姿を特定していく方法があります。リウビルの定理を使う好事例ではありますが，係数 $-i\sqrt{-i\tau}$ が証明の後半で初めて計算されるため，美しくない証明だなと私は感じています。(1) の一般的な証明のもう 1 つに，$\theta(z,\tau)$ をフーリエ変換して $\theta\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$ との関係を導く方法があります。直接的な計算で (1) が導かれるのは理解しやすいものの，フーリエ変換の魔術に飲まれてテータ関数の重要な部分が隠されてしまっている気がします。

以下の文章では，(1) を留数定理から導く直接的な方法を紹介します。$\theta(z,\tau)$ を対称性の高い形で再定義し，ある複素積分を通して眺めてみると，$e^{\pi i z^2/\tau}$ の指数部分はある留数の変形であり，一方で $-i\sqrt{-i\tau}$ は単に $\theta(z,\tau)$ の定義から来る歪みとして捉えられます。(1) はいくつかの自然な式を組み合わせた結果，少し醜くなってしまった式として捉えられるのです。モジュラー変換式 (1) を理解する上でこの捉え方は美しく，数学界でさらに定着すべきだと私は考えており，ここで文章にまとめました。

2　テータ関数 $\theta_0(z,\tau)$ の定義

今回は特に (1) の $-i\sqrt{-i\tau}$ の項と $e^{\pi i z^2/\tau}$ の項を分析したいので，実質的に $\theta\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$ と $\theta(z,\tau)$ の比を考えることになります。比を考える上で無限級数は扱いづらいですので，古くから知られる無限積表示を基礎にしていきます。まずは次の記法を導入しましょう。

$$(x;q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty}(1-xq^n) \qquad (x, q \in \mathbb{C},\ |q|<1)$$

この定義により，まずは $(1;q)_\infty = 0$ および $(x;q)_\infty = (1-x)\cdot(qx;q)_\infty$ を確認できます。

次に，$x = e^{2\pi i z}, q = e^{2\pi i \tau}$ とおいて上の記法を用いると，ヤコビの三重積公式と呼ばれる有名公式により，$\theta(z,\tau)$ は次のような無限積表示へと書き換えることができます。

$$\begin{aligned}\theta(z,\tau) &= ie^{\pi i(\tau/4-z)}\prod_{n=0}^{\infty}(1-e^{2\pi i(n+1)\tau})(1-e^{2\pi i(n\tau+z)})(1-e^{2\pi i((n+1)\tau-z)}) \\ &= ie^{\pi i(\tau/4-z)}(q;q)_\infty(x;q)_\infty(q/x;q)_\infty \qquad (2)\end{aligned}$$

この無限積表示からは，テータ関数は z（または x）の関数としては最後の 2 項だけが本質的な性質を現わしているのではないかと期待されます。そこで，テータ関数を次のように定義し直して以下の考察の対象とします。

$$\theta_0(z,\tau) = (x;q)_\infty(q/x;q)_\infty \qquad (3)$$

定義より，$\theta_0(0,\tau)=0$，$\theta_0(z+1,\tau)=\theta_0(z,\tau)$，$\theta_0(z+\tau,\tau) = -e^{2\pi i z}\theta_0(z,\tau)$，および $\theta_0(\tau-z,\tau)=\theta_0(z,\tau)$ を確認できます。

3　$\theta_0(z,\tau)$ の積分表示

無限積で定義した $\theta_0(z,\tau)$ は，指数関数と複素積分を組み合わせて表現すると，さらに扱い易くなります。そのためにまず，次の恒等式を紹介しておきます。

$$1-y = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}\right) \qquad (|y|<1)$$

この式は両辺の log をとった形ではよく知られていますが，上の形でも有用です。この式を用いて，さらに収束性のために $\mathrm{Im}\, z > 0$ を仮定して次のような式変形を考えます。

$$\begin{aligned}(x;q)_\infty &= \prod_{k=0}^{\infty}(1-e^{2\pi i(z+k\tau)}) \\ &= \prod_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i n(z+k\tau)}}{n}\right\} \\ &= \exp\left\{-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i n(z+k\tau)}}{n}\right\} \\ &= \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i n z}}{n}\sum_{k=0}^{\infty}e^{2\pi i n k\tau}\right\} \\ &= \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i n z}}{n(1-e^{2\pi i n\tau})}\right\}\end{aligned}$$

最後の無限級数をある関数の留数の和として捉えると，さらに次のような積分表示が得られます。積分路 C_1 は下の図の通りとします。

$$(x;q)_\infty = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi inz}}{n(1-e^{2\pi in\tau})}\right\} = \exp\left\{\int_{C_1}\frac{e^{2\pi izt}}{t(1-e^{2\pi it})(1-e^{2\pi i\tau t})}dt\right\}$$

実際，上の被積分関数の極は整数全体 $\mathbb{Z}$ および $\left\{\frac{2\pi in}{\tau} \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$ で，$t=n>0$ での留数は，

$$\operatorname*{Res}_{t=n}\frac{e^{2\pi izt}}{t(1-e^{2\pi it})(1-e^{2\pi i\tau t})} = \lim_{t\to n}(t-n)\frac{e^{2\pi izt}}{t(1-e^{2\pi it})(1-e^{2\pi i\tau t})} = -\frac{e^{2\pi inz}}{2\pi in(1-e^{2\pi in\tau})}$$

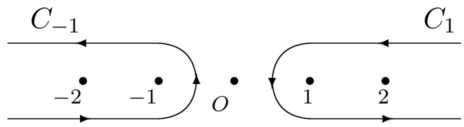
ですので，積分路 C_1 の中の留数を拾い集めていくことで上の積分表示を確認できます。

また，$\operatorname{Im} z < \operatorname{Im}\tau$ のときは，積分路 C_{-1} を用いて次のような同様の式も成り立ちます。

$$(q/x;q)_\infty = \exp\left\{-\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{e^{2\pi inz}}{n(1-e^{2\pi in\tau})}\right\} = \exp\left\{\int_{C_{-1}}\frac{e^{2\pi izt}}{t(1-e^{2\pi it})(1-e^{2\pi i\tau t})}dt\right\}$$

以上を併せると，$0<\operatorname{Im} z<\operatorname{Im}\tau$ のとき，次のように $\theta_0(z,\tau)$ の積分表示が得られます。

$$\theta_0(z,\tau) = \exp\left\{-\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{e^{2\pi inz}}{n(1-e^{2\pi in\tau})}\right\} = \exp\left\{\left(\int_{C_1}+\int_{C_{-1}}\right)\frac{e^{2\pi izt}}{t(1-e^{2\pi it})(1-e^{2\pi i\tau t})}dt\right\}$$



この積分表示を用いると，$\theta_0(z,\tau)$ と $\theta_0\left(-\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)$ の関係が浮き彫りになっていきます。

4　$\theta_0(z,\tau)$ のモジュラー変換式

(1) に当たる $\theta_0(z,\tau)$ のモジュラー変換式を導くため，しばらくは $\theta_0(z,\tau)\theta_0\left(-\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)^{-1}$ を計算することを目標にします。そのために今度は，$\theta_0\left(-\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)$ の積分表示を考えるため，前節の $\theta_0(z,\tau)$ の積分表示で z を $-\frac{z}{\tau}$ に，τ を $-\frac{1}{\tau}$ に置き換えた次の式を使います。ただし，両者の積分表示を可能とするため，以下，$0,1,\tau,\tau+1$ の 4 点で囲まれる平行四辺形の内部に含まれる z について考えるものとします。

$$\theta_0\left(-\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right) = \exp\left\{\left(\int_{C_1}+\int_{C_{-1}}\right)\frac{e^{-2\pi izt/\tau}}{t(1-e^{2\pi it})(1-e^{-2\pi it/\tau})}dt\right\}$$

$\theta_0(z,\tau)$ と $\theta_0\left(-\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)$ の積分表示で被積分関数を揃えると $\theta_0(z,\tau)\theta_0\left(-\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)^{-1}$ を計算しやすくなりますので，次に，上の積分変数 t を τt に置き換える変数変換を行います。

$$\theta_0\left(-\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right) = \exp\left\{\left(\int_{C_{1/\tau}}+\int_{C_{-1/\tau}}\right)\frac{e^{-2\pi izt}}{t(1-e^{2\pi i\tau t})(1-e^{-2\pi it})}dt\right\}$$

当然，積分路も変更されるわけですが，それが次のページの左の図の $C_{1/\tau}$ と $C_{-1/\tau}$ です。

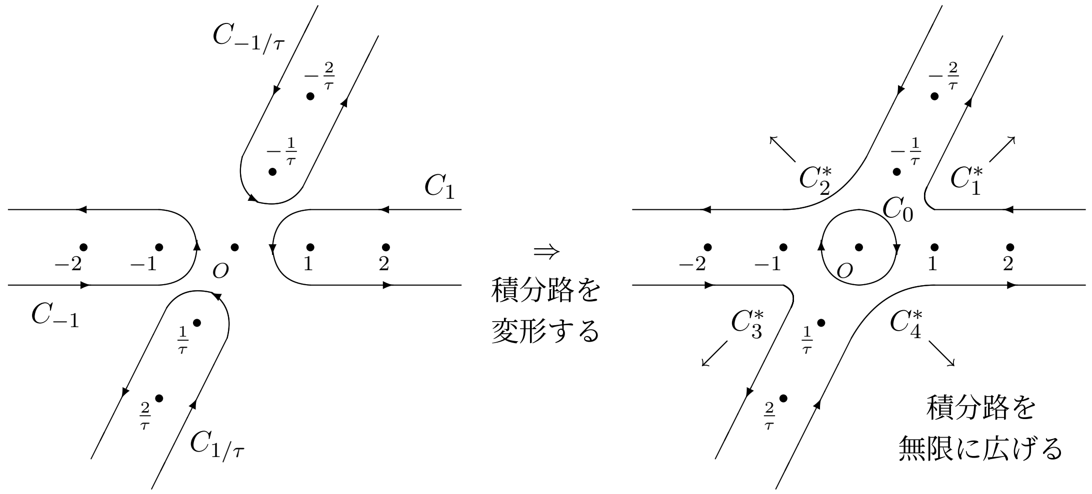
しかし，変数変換をしてもまだ被積分関数が $\theta_0(z,\tau)$ と異なります。そこで，定義から自明である $\theta_0(\tau - z,\tau) = \theta_0(z,\tau)$ を書き換えた $\theta_0\left(\frac{z-1}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \theta_0\left(-\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$ を用います。つまり，先の式の右辺においては次のように z を $1-z$ に置き換えることが許されるのです。

$$
\begin{aligned}
\theta_0\left(-\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \exp\left\{\left(\int_{C_{1/\tau}} + \int_{C_{-1/\tau}}\right) \frac{e^{-2\pi i(1-z)t}}{t(1-e^{2\pi i\tau t})(1-e^{-2\pi i t})}dt\right\} \\
&= \exp\left\{-\left(\int_{C_{1/\tau}} + \int_{C_{-1/\tau}}\right) \frac{e^{2\pi i z t}}{t(1-e^{2\pi i\tau t})(1-e^{2\pi i t})}dt\right\}
\end{aligned}
$$

さて，$\theta_0(z,\tau)$ と $\theta_0\left(-\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$ の被積分関数が統一できたところで，次の式を計算します。

$$
\theta_0(z,\tau)\,\theta_0\left(-\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)^{-1} = \exp\left\{\left(\int_{C_1} + \int_{C_{-1/\tau}} + \int_{C_{-1}} + \int_{C_{1/\tau}}\right) \frac{e^{2\pi i z t}}{t(1-e^{2\pi i t})(1-e^{2\pi i\tau t})}dt\right\}
$$

積分路が 4 つ登場しましたが，コーシーの積分定理により，これらは左下の図から右下の図のように変形できます。そしてさらに，上の被積分関数は $C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_4^*$ 上で積分しても値が 0 となります。というのも，これらの積分路を外側に無限に広げていくと，被積分関数の値はどちらの方向へ向かっても指数関数の逆数のオーダーで 0 に収束するからです。当然，その過程で極をまたぐことはなく，また，極との一定の距離も保つものとします。



以上をまとめると次のようになります。

$$
\theta_0(z,\tau)\ \theta_0\left(-\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)^{-1} = \exp\left\{\int_{C_0} \frac{e^{2\pi i z t}}{t(1-e^{2\pi i t})(1-e^{2\pi i\tau t})}dt\right\}
$$

この積分の値を再び留数定理で求めます。一般に,（ベルヌーイ数の議論で有名なように,）

$$
\frac{y}{e^y - 1} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{12} - \frac{y^4}{720}\cdots
$$

ですので，被積分関数を t^{-1} の係数に注目して展開することにより，次が成り立ちます。

$$
\operatorname*{Res}_{t=0} \frac{e^{2\pi i z t}}{t(1-e^{2\pi i t})(1-e^{2\pi i\tau t})} = \frac{z^2}{2\tau} - \frac{z}{2\tau} - \frac{z}{2} + \frac{\tau}{12} + \frac{1}{12\tau} + \frac{1}{4}
$$

そして，C_0 が右回りであることにも注意して留数定理を用いると，$\theta_0(z,\tau)\,\theta_0\left(-\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)^{-1}$ の値が求まり，$\theta_0(z,\tau)$ のモジュラー変換式が次のように導かれます。

$$\theta_0\left(-\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)=\exp\left\{\pi i\left(\frac{z^2}{\tau}-\frac{z}{\tau}-z+\frac{\tau}{6}+\frac{1}{6\tau}+\frac{1}{2}\right)\right\}\theta_0(z,\tau) \tag{4}$$

途中の式変形では z について制限をかけていましたが，この式は正則関数の性質により，すべての $z\in\mathbb{C}$ で成り立っています。

また，z を $\tau-z$ に置き換えると次のようになります。

$$\theta_0\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)=\exp\left\{\pi i\left(\frac{z^2}{\tau}+\frac{z}{\tau}-z+\frac{\tau}{6}+\frac{1}{6\tau}-\frac{1}{2}\right)\right\}\theta_0(z,\tau) \tag{5}$$

(1) と比べると指数部分が長くなってしまっていますが，留数計算から得られる自然な式ですので，(4) や (5) の方が (1) よりもテータ関数の本質を捉えていると私は考えています。

5 $(q;q)_\infty$ あるいは $\eta(\tau)$ のモジュラー変換式

$\theta(z,\tau)$ と $\theta_0(z,\tau)$ が異なるのは，前者は無限積 3 つで書かれる一方，後者は無限積 2 つで書かれる点です。そして実は，その間にある 1 つの無限積 $(q;q)_\infty$ にもモジュラー変換式が存在します。(4) の両辺を $z=0$ で微分すると結果が得られる様子を以下に示します。

まず，$(x;q)_\infty$ の定義と $(1;q)_\infty=0$ より，次の式が成り立ちます。

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dx}(x;q)_\infty\right|_{x=1} &= \lim_{x\to1}\frac{(x;q)_\infty-0}{x-1}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{\prod_{n=0}^{\infty}(1-xq^n)}{x-1}\\ &= -\lim_{x\to1}\prod_{n=1}^{\infty}(1-xq^n)\\ &= -(q;q)_\infty\end{aligned}$$

さらに，$(1;q)_\infty=0$ を再び用いると次の式が成り立ちます。

$$\left.\frac{d}{dx}\left\{(x;q)_\infty(q/x;q)_\infty\right\}\right|_{x=1}=-{(q;q)_\infty}^2$$

上の式は，$x=e^{2\pi iz},q=e^{2\pi i\tau}$ で書き直すと次のようになります。

$$\left.\frac{d}{dz}\theta_0(z,\tau)\right|_{z=0}=-2\pi i\ {(q;q)_\infty}^2$$

また今度は，$q'=e^{-2\pi i/\tau}$ とおくと次の式も成り立ちます。

$$\left.\frac{d}{dz}\theta_0\left(-\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)\right|_{z=0}=\frac{2\pi i}{\tau}\ {(q';q')_\infty}^2$$

以上の式と，$\theta_0(0,\tau)=0$ に注意して (4) の両辺を $z=0$ で微分すると次が導かれます。

$$\frac{2\pi i}{\tau}\ {(q';q')_\infty}^2=\exp\left\{\pi i\left(\frac{\tau}{6}+\frac{1}{6\tau}+\frac{1}{2}\right)\right\}\left\{-2\pi i\ {(q;q)_\infty}^2\right\}$$

両辺の平方根を取りたいのですが，$\pm$ の多価性に注意する必要があります。しかし，$\tau = i$ の場合を考えると多価性は排除され，次の $(q;q)_\infty$ のモジュラー変換式が成り立ちます。

$$(q';q')_\infty = \sqrt{-i\tau}\exp\left\{\frac{\pi i}{12}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)\right\}(q;q)_\infty \tag{6}$$

なお，デデキントのイータ関数 $\eta(\tau) = q^{1/24}\ (q;q)_\infty$ という関数があるのですが，これをを用いると上の式は，$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\ \eta(\tau)$ と書くことができます。これらの式もモジュラー変換式 (1) と同様に，数学および物理学で有用な関係式のようです。

6　$\theta(z,\tau)$ のモジュラー変換式の導出

最後に，(5) と (6) から (1) を導きます。具体的には，(2) および (3) より，

$$\theta(z,\tau) = ie^{\pi i(\tau/4 - z)}\ \ (q;q)_\infty\ \theta_0(z,\tau)$$

が成り立ちますので，次のように式変形していくと (1) が得られます。

$$\begin{aligned}
\theta\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= ie^{\pi i(-1/4\tau - z/\tau)}\ (q';q')_\infty\ \theta_0\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) \\
&= \exp\left\{\pi i\left(-\frac{1}{4\tau} - \frac{z}{\tau} + \frac{1}{2}\right)\right\} \times \sqrt{-i\tau}\exp\left\{\frac{\pi i}{12}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)\right\}(q;q)_\infty \\
&\quad \times \exp\left\{\pi i\left(\frac{z^2}{\tau} + \frac{z}{\tau} - z + \frac{\tau}{6} + \frac{1}{6\tau} - \frac{1}{2}\right)\right\}\theta_0(z,\tau) \\
&= \sqrt{-i\tau}\exp\left\{\pi i\left(\frac{z^2}{\tau} + \frac{\tau}{4} - z\right)\right\}\ (q;q)_\infty\theta_0(z,\tau) \\
&= -i\sqrt{-i\tau}e^{\pi i z^2/\tau}\theta(z,\tau)
\end{aligned}$$

以上で (1) を証明することができました。まず留数定理で (4) を導き，(5) と (6) を経由して (1) を導くまでの過程は長いです。しかしながら，留数計算を通した手法が直接的であり，また，鍵となる (4) を導いた後は単純な式変形だけで証明が済んでいるという点でも以上の証明は優れていると私は感じています。

もともとモジュラー変換式 (1) は，$\theta(z,\tau)$ の定義に強く依存しています。オイラーの時代からの多くの研究を経て $\theta(z,\tau)$ は無限級数の形で定義され，その結果 $\theta(z,\tau)$ は三重積表示 (2) を持ち，同時に (1) のような性質を持っているのだと言えます。しかしながら，複素関数論を用いてモジュラー変換式を理解するのであれば，テータ関数は三重積ではなく二重積として定義する方が美しいと私は考えています。今後この文章が，テータ関数を扱う方にとっての一助となることを願ってやみません。

成川淳 (なるかわあつし)