$\boxed{1}$ $\dfrac{4}{2+\sqrt{2}}$ の整数部分は $\boxed{\ \text{ア}\ }$ であり，小数部分を a とすると，

$a+\dfrac{1}{a}=\boxed{\ \text{イ}\ }$， $a^3+\dfrac{1}{a^3}=\boxed{\ \text{ウ}\ }$ となる。

(成蹊大)

$\boxed{2}$ 連立 1 次方程式

$$\begin{cases}(a-1)x+y=1\\(a+1)x+(2a-1)y=3\end{cases}\qquad\cdots\cdots\ (*)$$

が解を無数にもつとき，次の問いに答えよ。ただし，a は定数とする。

(1)　a の値を定めよ。

(2)　$(*)$の解 $(x,\ y)$ のなかで x^3+y^3 の値を最小とするものを求めよ。

(信州大)

$\boxed{3}$ 2つの不等式

$$|x-a| \leqq 2a+3 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$|x-2a| > 4a-4 \qquad \cdots\cdots ②$$

について考える。

(1) 不等式①を満たす実数 x が存在するような定数 a の値の範囲を求めなさい。

(2) 不等式①と②を同時に満たす実数 x が存在するような定数 a の値の範囲を求めなさい。

(鳴門教育大)

$\boxed{4}$ 関数 $f(x) = \dfrac{3-2x}{x-4}$ がある。方程式 $f(x) = x$ の解を求めよ。また，不等式 $f(x) \leqq x$ を解け。

(南山大)

$\boxed{5}$ a, b, c は定数で $a < b < c$ を満たすものとする。関数 $f(x)$ を

$$f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c|$$

で定める。

(1) x がすべての実数を動くとき，$4x + 3f(x)$ の最小値は

$$\boxed{\text{ヒ}}\,a + \boxed{\text{フ}}\,b + \boxed{\text{ヘ}}\,c$$

である。

(2) x がすべての実数を動くときの $f(x)$ の最小値が 18 で，$f(c) = 32$ ならば

$$b = \boxed{\text{ホ}}\,a + \boxed{\text{マ}}, \quad c = \boxed{\text{ミ}}\,a + \boxed{\text{ム}}$$

が成り立つ。さらに $f(-12) = 25$ ならば，

$$a = \boxed{\text{メ}}, \quad b = \boxed{\text{モ}}, \quad c = \boxed{\text{ヤ}}$$

であるか，あるいは

$$a = \boxed{\text{ユ}}, \quad b = \boxed{\text{ヨ}}, \quad c = \boxed{\text{ラ}}$$

である。ここで $\boxed{\text{メ}} < \boxed{\text{ユ}}$ とする。

(上智大)

$\boxed{6}$ 以下の問いに答えよ。

(1) x，y の関数 $P = x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 2$ の最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を示せ。

(2) $0 \leqq x \leqq 3$，$0 \leqq y \leqq 3$ のとき，(1)の関数 P の最大値および最小値を求めよ。また，それぞれの場合の x，y の値を示せ。

(3) x，y の関数 $Q = x^2 - 6xy + 10y^2 - 2x + 2y + 2$ の最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を示せ。

(豊橋技科大)

$\boxed{7}$ 等式

$$(*)\quad x^2 - xy + y^2 = 2$$

をみたす実数 $x,\ y$ に対し，$x^3 + y^3 + 3xy$ の最大値と最小値を以下の手順で求めよう。

(1) まず，$p = x + y,\ q = xy$ とおき，$x^3 + y^3 + 3xy$ を $p,\ q$ を用いた式で表すと，$\boxed{\text{ア}}$ となる。

(2) 次に，$x^3 + y^3 + 3xy$ を p のみを用いた式で表そう。
等式 $(*)$を $p,\ q$ を用いて書き直し，q について解くと $q = \boxed{\text{イ}}$ となる。したがって，$x^3 + y^3 + 3xy$ を p を用いて表せば $\boxed{\text{ウ}}$ となる。

(3) p のとり得る値の範囲を求めよう。
$x,\ y$ を解とする t についての 2 次方程式は $t^2 - pt + \boxed{\text{イ}} = 0$ であり，この 2 次方程式が実数解をもつための必要十分条件を p を用いて表すと $\boxed{\text{エ}}$ となる。したがって，p がとり得る値の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(4) 以上より，$x^3 + y^3 + 3xy$ の最大値と最小値を求める問題は $\boxed{\text{オ}}$ の範囲における $\boxed{\text{ウ}}$ の最大値と最小値を求める問題に帰着され，次のように求まる。
$(x,\ y) = \boxed{\text{カ}}$ のとき，最大値 $\boxed{\text{キ}}$ をとり，$(x,\ y) = \boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる。

(日大)

$\boxed{8}$ m を実数とする。x の関数 $f(x) = x^2 + 3x + m$ の $m \leqq x \leqq m + 2$ における最小値を g とおく。以下の問に答えよ。

(1) $m > -\dfrac{3}{2}$ のとき，g を m を用いて表せ。

(2) $m \leqq -\dfrac{3}{2}$ のとき，g を m を用いて表せ。

(3) m の値がすべての実数を変化するとき，g の最小値を求めよ。

(岐阜大)

$\boxed{9}$　α，β を $0 < \alpha < \beta < 2$ を満たす実数とし，$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を

$$f(x) = |(x-\alpha)(x-\beta)|$$

とする。

(1) $f(x)$ の最大値を M とする。$f(x) = M$ とする x がちょうど 3 つあるとき，実数 α，β と M の値を求めよ。

(2) (1)で求めた α，β について，$f(x) - mx = 0$ が異なる 3 つの解をもつような実数 m の値の範囲を求めよ。

(北大)

$\boxed{10}$　a を正の実数とし，x についての 2 次方程式

$$2ax^2 - 2x + 4a - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える。

(1) 方程式①が $-\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 2$ の範囲にただ 1 つの解をもつ(ただし，重解は除く)。このとき a の値の範囲を求めよ。

(2) 方程式①が $-\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 2$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつ。このとき a の値の範囲を求めよ。

(西南学院大)

$\boxed{11}$ 四角形 ABCD は円 O に内接し，各辺の長さは AB = 1, BC = 1, CD = 2, DA = 3 である。

(1) $\mathrm{BD} = \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$,　$\angle\mathrm{BCD} = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi$ である。

(2) 四角形 ABCD の面積は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(3) 円 O の面積は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi$ である。

(4) 3 辺 BC, CD, DA に接する円の面積は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi$ である。

(上智大)

$\boxed{12}$ 三角形 ABC の辺 BC を 4 : 3 に内分する点を T とし，点 T を接点として辺 BC に接する円が点 A で辺 AC とも接しているとする。AB = 10, AC = 6, $\angle\mathrm{BAC} = 120^\circ$, 円と辺 AB との交点を D として，次の問いに答えよ。

(1) BC の長さを求めよ。
(2) $\triangle$ABC の面積を求めよ。
(3) AD の長さを求めよ。
(4) $\triangle$ATC の面積を求めよ。
(5) この円の半径 r を求めよ。

(関東学院大)

$\boxed{13}$

$\triangle$ABC において，辺 AB，AC の中点をそれぞれ D，E とし，辺 AB の垂直二等分線と $\triangle$ABC の外接円 O の C を含まない弧 AB との交点を F，辺 AC の垂直二等分線と外接円 O の B を含まない弧 AC との交点を G とする。そして，$\triangle$ABC の内接円の中心を I とする。以下は，

$$4\mathrm{DF}\cdot\mathrm{EG}=\mathrm{AI}^2$$

が成立することの証明である。$\angle\mathrm{CAB}=\alpha$，$\angle\mathrm{ABC}=\beta$，$\angle\mathrm{BCA}=\gamma$ とし，以下の $\boxed{}$ にあてはまる数または式を α，β，γ，π を用いて，最も簡単な形で解答欄に記入せよ。

証明：線分 AI の中点を H とする。四角形 AFDH について，

$$\angle\mathrm{ADH}=\boxed{\text{ア}},\qquad \angle\mathrm{HAD}=\boxed{\text{イ}},\qquad \angle\mathrm{DAF}=\boxed{\text{ウ}}$$

であるから，

$$\angle\mathrm{HAF}+\angle\mathrm{FDH}=\boxed{\text{エ}}$$

となり，四角形 AFDH は円に内接する。よって，

$$\angle\mathrm{AFH}=\boxed{\text{オ}}$$

であり，

$$\mathrm{DF}:\mathrm{AH}=\sin\boxed{\text{カ}}:\sin\boxed{\text{キ}}$$

となる。一方，四角形 AHEG についても，同様にして，

$$\angle\mathrm{GAE}=\boxed{\text{ク}},\qquad \angle\mathrm{HGA}=\boxed{\text{ケ}}$$

であるから，

$$\mathrm{AH}:\mathrm{EG}=\sin\boxed{\text{カ}}:\sin\boxed{\text{キ}}$$

ゆえに，$\mathrm{DF}\cdot\mathrm{EG}=\mathrm{AH}^2$，つまり，$4\mathrm{DF}\cdot\mathrm{EG}=\mathrm{AI}^2$ が成立する。

(京都薬大)

$\boxed{14}$　$\triangle$ABC において，$\angle$A の二等分線とこの三角形の外接円との交点で A と異なる点を A$'$ とする。同様に $\angle$B，$\angle$C の二等分線とこの外接円との交点をそれぞれ B$'$，C$'$ とする。このとき 3 直線 AA$'$，BB$'$，CC$'$ は 1 点 H で交わり，この点 H は三角形 A$'$B$'$C$'$ の垂心と一致することを証明せよ。

(京大)

$\boxed{15}$　A，B，C，D，E，F の 6 文字を 1 列に並べることを考える．

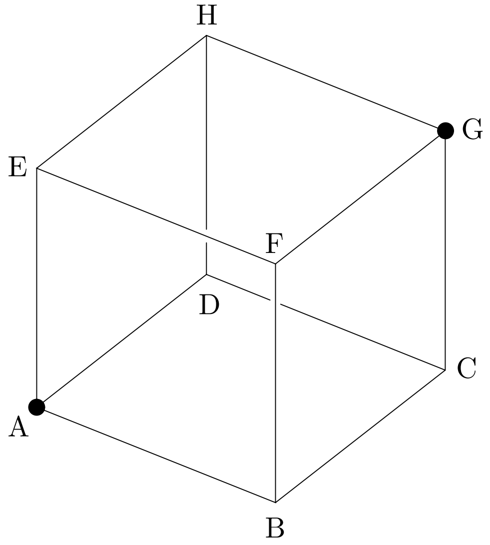
(1)　E と F の間に（あるいは F と E の間にといってもよいが），ちょうど 3 文字が並ぶ並べ方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りある．また E と F の間にちょうど 2 文字が並ぶ並べ方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りあり，ちょうど 1 文字が並ぶ並べ方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある．

(2)　E と F が隣り合わない並べ方は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある．

(3)　E と F の間に並ぶ文字の中に，A が入る並べ方は $\boxed{\text{オ}}$ 通りあり，E と F の間のに並ぶ文字の中に，A と B がともに入る並べ方は $\boxed{\text{カ}}$ 通りある．また，E と F の間に並ぶ文字の中に，C が入らない並べ方は $\boxed{\text{キ}}$ 通りある．

(東海大)

16　立方体 ABCD-EFGH において, 1 つの頂点 A から, それと面を共有しない頂点 G まで, 辺または面の対角線をたどって進む経路を考える。



(1) 辺 3 本からなる経路は $\boxed{\text{セ}}$ 通りである。

(2) 対角線 1 本と辺 1 本からなる経路は $\boxed{\text{ソ}}$ 通りである。

(3) 対角線 1 本と辺 2 本からなる経路は $\boxed{\text{タ}}$ 通りである。

(4) 対角線 2 本と辺 1 本からなる経路は $\boxed{\text{チ}}$ 通りである。

(5) 対角線 1 本と辺 3 本からなる経路は $\boxed{\text{ツ}}$ 通りである。
ただし, 同じ辺は 2 回通らないものとする。

(上智大)

$\boxed{17}$ 10 枚のカードに 1 から 10 までの数が 1 つずつ書かれている。この中から 2 枚のカードを同時に引いて，それらに書かれている数を a, b とする。

(1) 積 ab が 3 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

(2) 和 $a+b$ が 3 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(3) 積 ab が 4 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

(4) 和 $a+b$ が 4 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

(東京薬大)

$\boxed{18}$ 1 から 6 までの目をもつ立方体のサイコロを 3 回投げる。そして 1, 2, 3 回目に出た目をそれぞれ a, b, c とする。

(1) a, b, c を 3 辺の長さとする正三角形が作れる確率を求めよ。

(2) a, b, c を 3 辺の長さとする二等辺三角形が作れる確率を求めよ。

(3) a, b, c を 3 辺の長さとする三角形が作れる確率を求めよ。

(滋賀医大)

$\boxed{19}$ 英字6文字からなる文字列を考える。さいころを投げ，出た目が n であれば先頭から n 番目の文字を先頭に移動する操作を「操作(＊)」と呼ぶ。例えば，文字列「ABCDEF」から始めて，操作(＊)を2回行い，さいころの目が1回目は3，2回目は4であった場合には，文字列は1回目の操作(＊)により「CABDEF」となり，2回目の操作(＊)により「DCABEF」となる。このとき，以下の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{タ}$ に入る正しい答えを選んでマークしなさい。

(1) 文字列「AAABBB」から始めて操作(＊)を1回行った結果，文字列が「AAABBB」となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2) 文字列「AAABBB」から始めて操作(＊)を2回行った結果，文字列が「AAABBB」となる確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

(3) 文字列「AAABBB」から始めて操作(＊)を3回行った結果，文字列が「BBBAAA」となる確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$ である。

(4) 文字列「AAABBB」から始めて操作(＊)を2回行った結果，文字列の左から2番目がAになる確率は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}$ である。

(5) 文字列「AAABBB」から始めて操作(＊)を5回行った結果，文字列の一番左がAになる確率は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。

(6) 文字列「ABCDEF」から始めて操作(＊)を5回行った結果，文字列の一番右がAになる確率は $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セソタ}}$ である。

(駒澤大)

$\boxed{20}$

(1)　1 枚の硬貨を 5 回投げるとき，少なくとも 1 回裏が出る確率は $\boxed{\text{ナ}}$ である。

(2)　3 枚の硬貨を同時に投げて，裏が出たものを取り去り，つぎに，残っている硬貨があればそれらを同時に投げて，裏が出たものを取り去る。この手続きを繰り返す。ただし，硬貨が残っていても 5 回目を投げて終りとする。以下の設問で，必要ならば $2^{10}=1024$ であることを参考にせよ。

(a)　5 回目を投げることがない確率は $\boxed{\text{ニ}}$ である。

(b)　4 回目を投げてちょうど全部の硬貨がなくなる確率は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。

(c)　4 回目を投げて 1 枚の硬貨が残っている確率は $\boxed{\text{ネ}}$ である。

(北里大)

$\boxed{21}$　A，B 2 人が，次のようなゲームをする。

1 枚の硬貨を 1 回投げるごとに，表が出ると A が 1 点得点し，裏が出ると B が 1 点得点する。どちらか一方が 4 点になったときに硬貨投げを止め，4 点得点した方を勝者とし，もう一方を敗者とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A の得点が 1 点かつ B の得点が 2 点という状況を経て，A がこのゲームの勝者となる確率を求めよ。

(2)　A の得点が B の得点より多いか，または同点であるという状態を，ゲームの始めから終わりまで保ちながら，A がこのゲームの勝者となる確率を求めよ。

(3)　このゲームの勝者が決まるまでの，硬貨を投げる回数の期待値を求めよ。また，敗者の得点の期待値を求めよ。

(秋田大)

$\boxed{22}$ 正の整数 A に対して，つぎの条件(i), (ii)をみたす正の整数の組 $(a,\ b)$ の総数を $N(A)$ と表わす。

(i) $a < b$
(ii) a と b の最小公倍数は A である。

(1) $N(105)$ を求めよ。
(2) $N(2310)$ を求めよ。

(大分大)

$\boxed{23}$ 2 次方程式 $x^2 + (2m+5)x + (m+3) = 0$ が整数の解をもつための整数 m の値をすべて列挙すると $\boxed{}$ である。

(神戸薬大)

$\boxed{24}$ 以下の問いに答えよ。

(1) x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば，x は整数であることを示せ。

(2) a，b を整数とする。$a^2 - 7b^2$ が 4 の倍数ならば，a と b はともに偶数であることを示せ。

(3) r は整数，s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2 - 7s^2$ が整数ならば，s は整数であることを示せ。

(千葉大)

$\boxed{1}$ $\dfrac{4}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{4(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 4-2\sqrt{2} = 4-\sqrt{8}$

$2^2 < 8 < 3^2$ より

$$2 < \sqrt{8} < 3$$

$$4-3 < 4-\sqrt{8} < 4-2 \qquad \therefore\ 1 < \frac{4}{2+\sqrt{2}} < 2$$

よって，

$$\frac{4}{2+\sqrt{2}} \text{ の整数部分は } \underset{(\text{ア})}{\boxed{1}}$$

である。

小数部分 a は

$$a = (4-2\sqrt{2}\,)-1 = 3-2\sqrt{2}$$

であるから，

$$\frac{1}{a} = \frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2}\,)(3+2\sqrt{2}\,)} = 3+2\sqrt{2}$$

$$a+\frac{1}{a} = (3-2\sqrt{2}\,)+(3+2\sqrt{2}\,) = \underset{(\text{イ})}{\boxed{6}}$$

$$a^3+\frac{1}{a^3} = \left(a+\frac{1}{a}\right)^3 - 3a\cdot\frac{1}{a}\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right) = 6^3-3\cdot1\cdot6 = \underset{(\text{ウ})}{\boxed{198}}$$

$\boxed{2}$

$$\begin{cases} (a-1)x+y=1 & \cdots\cdots \text{①} \\ (a+1)x+(2a-1)y=3 & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$

(1)　①を②に代入して y を消去すると，

$$(a+1)x+(2a-1)\{1-(a-1)x\}=3$$
$$\{(a-1)(2a-1)-(a+1)\}x=2a-1-3$$
$$(2a^2-4a)x=2a-4$$
$$\therefore\ a(a-2)x=a-2 \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

③を満たす x に対して，①より y はただ一つに定まるから，(∗)が解を無数にもつための条件は，③を満たす x が無数に存在することである。よって，

$$a=2 \quad (答)$$

(2)　①より

$$y=1-x$$

であり，(∗)の解 $(x,\ y)$ のなかで

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= x^3+(1-x)^3 \\ &= 1-3x+3x^2 \\ &= 3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

を最小とするものは

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \quad (答)$$

(注)　連立方程式の同値関係は

①かつ② $\Longleftrightarrow$ ①かつ③

となっている。

$\boxed{3}$

$$|x-a| \leqq 2a+3 \quad \cdots\cdots ①$$
$$|x-2a| > 4a-4 \quad \cdots\cdots ②$$

(1)　①を満たす実数 x が存在するための条件は

$$0 \leqq 2a+3 \qquad \therefore\ a \geqq -\frac{3}{2} \quad (答) \quad \cdots\cdots ③$$

(2)　① $\iff -(2a+3) \leqq x-a \leqq 2a+3 \iff -a-3 \leqq x \leqq 3a+3$

② $\iff x-2a < -(4a-4)$ または $4a-4 < x-2a$

$\iff x < -2a+4$ または $x > 6a-4$

①かつ② を満たす実数 x が存在するための条件は，③のもとで

$-a-3 < -2a+4$ または $6a-4 < 3a+3$

$a < 7$ または $a < \dfrac{7}{3}$ 　　$\therefore\ a < 7$

よって，求める範囲は

$$-\frac{3}{2} \leqq a < 7 \quad (答)$$

(注)　(1)は，あとの流れを考えて

① $\iff -a-3 \leqq x \leqq 3a+3$

より

$-a-3 \leqq 3a+3$

としてもよい。

$\boxed{4}$　$f(x)-x=\dfrac{3-2x-x(x-4)}{x-4}=\dfrac{-(x^2-2x-3)}{x-4}=-\dfrac{(x+1)(x-3)}{x-4}$

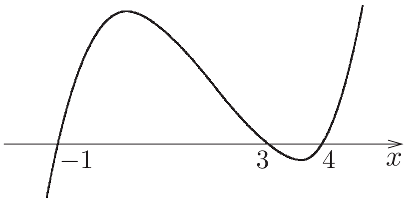
であるから，

$$\begin{aligned} f(x)=x &\iff (x+1)(x-3)=0 \text{ かつ } x-4\neq 0 \\ &\iff x=-1 \text{ または } x=3 \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)\leqq x &\iff f(x)=x \text{ または } f(x)<x \\ &\iff x=-1 \text{ または } x=3 \text{ または } -\frac{(x+1)(x-3)}{x-4}<0 \\ &\iff (x+1)(x-3)=0 \text{ または } (x+1)(x-3)(x-4)>0 \\ &\iff -1\leqq x\leqq 3 \text{ または } x>4 \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(注)

1°　$y=(x+1)(x-3)(x-4)$ のグラフの概形は



となるから，

$$(x+1)(x-3)(x-4)>0 \iff -1<x<3 \text{ または } x>4$$

である。本質的には，2 次不等式の解法と同じである。

2°　$f(x)\leqq x$ の同値変形は

$$\begin{aligned} f(x)\leqq x &\iff -\frac{(x+1)(x-3)}{x-4}\leqq 0 \\ &\iff -\frac{(x+1)(x-3)}{x-4}\cdot(x-4)^2\leqq 0 \text{ かつ } x-4\neq 0 \\ &\iff (x+1)(x-3)(x-4)\geqq 0 \text{ かつ } x\neq 4 \end{aligned}$$

としてもよい。

$\boxed{5}$

$$f(x)=\begin{cases} -(x-a)-(x-b)-(x-c)=-3x+a+b+c & (x \leqq a) \\ (x-a)-(x-b)-(x-c)=-x-a+b+c & (a \leqq x \leqq b) \\ (x-a)+(x-b)-(x-c)=x-a-b+c & (b \leqq x \leqq c) \\ (x-a)+(x-b)+(x-c)=3x-a-b-c & (x \geqq c) \end{cases}$$

(1)

$$4x+3f(x)=\begin{cases} 4x+3(-3x+a+b+c)=-5x+3a+3b+3c & (x \leqq a) \\ 4x+3(-x-a+b+c)=x-3a+3b+3c & (a \leqq x \leqq b) \\ 4x+3(x-a-b+c)=7x-3a-3b+3c & (b \leqq x \leqq c) \\ 4x+3(3x-a-b-c)=13x-3a-3b-3c & (x \geqq c) \end{cases}$$

の最小値は

$$4a+3f(a)=\underset{(ヒ)}{\boxed{-2}}\,a+\underset{(フ)}{\boxed{3}}\,b+\underset{(ヘ)}{\boxed{3}}\,c$$

(2)　$f(x)$ の最小値が

$$f(b)=-a+c=18$$

であり，

$$f(c)=2c-a-b=32$$

ならば，

$$c=\underset{(ミ)}{\boxed{1}}\,a+\underset{(ム)}{\boxed{18}},\quad b=2c-a-32=\underset{(ホ)}{\boxed{1}}\,a+\underset{(マ)}{\boxed{4}} \quad \cdots\cdots ①$$

さらに $f(-12)=25$ ならば，$f(-12)<f(c)$ より

$$-12<c=a+18 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②を考えて，a について場合分けすると，

(i)　$-12 \leqq a$ のとき

$$f(-12)=25=-3\cdot(-12)+a+(a+4)+(a+18)=3a+58$$
$$\therefore\ a=-11$$

(ii)　$a \leqq -12 \leqq a+4$ のとき

$$f(-12)=25=-(-12)-a+(a+4)+(a+18)=a+34$$

∴　不適

(iii)　$a+4 \leqq -12 \leqq a+18$ のとき

$$f(-12)=25=-12-a-(a+4)+(a+18)=-a+2$$
$$\therefore\ a=-23$$

①より b, c も求めて，

$$a=\underset{(メ)}{\boxed{-23}},\quad b=\underset{(モ)}{\boxed{-19}},\quad c=\underset{(ヤ)}{\boxed{-5}}$$

または

$$a=\underset{(ユ)}{\boxed{-11}},\quad b=\underset{(ヨ)}{\boxed{-7}},\quad c=\underset{(ラ)}{\boxed{7}}$$

$\boxed{6}$

(1)　$P = x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 2 = (x+2)^2 + 3(y-1)^2 - 5$

と変形できるから，関数 P は

$$x = -2,\ y = 1 \text{ のとき最小値 } -5 \quad \text{(答)}$$

をとる。

(2)　$0 \leqq x \leqq 3$ のとき

$$(x+2)^2 \text{ は } x = 3 \text{ で最大，} x = 0 \text{ で最小，}$$

$0 \leqq y \leqq 3$ のとき

$$3(y-1)^2 \text{ は } y = 3 \text{ で最大，} y = 1 \text{ で最小}$$

であるから，P は

$$\begin{cases} x = 3,\ y = 3 \text{ のとき　最大値 } 32 \\ x = 0,\ y = 1 \text{ のとき　最小値 } -1 \end{cases} \quad \text{(答)}$$

をとる。

(3)

$$\begin{aligned} Q &= x^2 - 6xy + 10y^2 - 2x + 2y + 2 \\ &= x^2 - 2(3y+1)x + 10y^2 + 2y + 2 \\ &= \{x - (3y+1)\}^2 - (3y+1)^2 + 10y^2 + 2y + 2 \\ &= \{x - (3y+1)\}^2 + y^2 - 4y + 1 \\ &= \{x - (3y+1)\}^2 + (y-2)^2 - 3 \end{aligned}$$

Q が最小となるのは $x = 3y + 1$ かつ $y - 2 = 0$ のときであり，

$$x = 7,\ y = 2 \text{ のとき 最小値 } -3 \quad \text{(答)}$$

$\boxed{7}$

(1) $$p = x + y, \quad q = xy \qquad \cdots\cdots ①$$

とおくと，

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + 3xy &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 3xy \\ &= \underbrace{\boxed{p^3 - 3pq + 3q}}_{(ア)} \qquad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

(2) $x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy$ であるから，(*)および ①より

$$p^2 - 3q = 2 \qquad \therefore\ q = \underbrace{\boxed{\frac{p^2-2}{3}}}_{(イ)} \qquad \cdots\cdots ③$$

②，③より

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + 3xy &= p^3 - 3(p-1)\cdot\frac{p^2-2}{3} = p^3 - (p-1)(p^2-2) \\ &= \underbrace{\boxed{p^2 + 2p - 2}}_{(ウ)} \qquad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

(3) ①，③より x，y を 2 解とする (t の) 2 次方程式は

$$t^2 - pt + \frac{p^2-2}{3} = 0 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

であり，x，y は実数であるから

$$(\text{判別式}) = \boxed{p^2 - 4\cdot\frac{p^2-2}{3} \geqq 0}\ (エ)$$

$$4(p^2-2) - 3p^2 \leqq 0 \qquad \therefore\ p^2 \leqq 8$$

$$\therefore\ \underbrace{\boxed{-2\sqrt{2} \leqq p \leqq 2\sqrt{2}}}_{(オ)} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

(4) ④より

$$x^3 + y^3 + 3xy = (p+1)^2 - 3$$

であり，⑥より

$p = 2\sqrt{2}$ のとき最大，$p = -1$ のとき最小

である。⑤より

$p = 2\sqrt{2}$ のとき $x = y = \sqrt{2}$，　$p = -1$ のとき $3t^2 + 3t - 1 = 0$

であるから，$x^3 + y^3 + 3xy$ は

$(x,\ y) = \underbrace{\boxed{(\sqrt{2},\ \sqrt{2})}}_{(カ)}$ のとき最大値 $\underbrace{\boxed{6 + 4\sqrt{2}}}_{(キ)}$

$(x,\ y) = \underbrace{\boxed{\left(\dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{6},\ \dfrac{-3 \mp \sqrt{21}}{6}\right)}}_{(ク,ケ)}$ (複号同順) のとき最小値 $\underbrace{\boxed{-3}}_{(コ)}$

をとる。

$\boxed{8}$ $f(x)=x^2+3x+m=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+m-\dfrac{9}{4}$

(1) $m>-\dfrac{3}{2}$ のとき，$m\leqq x\leqq m+2$ における最小値 g は

$$g=f(m)=m^2+4m \quad \text{(答)}$$

(2) $m\leqq-\dfrac{3}{2}$ のとき，さらに 2 つに分けて

$m\leqq-\dfrac{3}{2}\leqq m+2$ のとき　$g=f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=m-\dfrac{9}{4}$

$m+2\leqq-\dfrac{3}{2}$ のとき　$g=f(m+2)=(m+2)^2+3(m+2)+m$

以上をまとめて，

$$g=\begin{cases} m^2+8m+10 & \left(m\leqq-\dfrac{7}{2}\right) \\ m-\dfrac{9}{4} & \left(-\dfrac{7}{2}\leqq m\leqq-\dfrac{3}{2}\right) \end{cases} \quad \text{(答)}$$

(3) (1), (2)の結果を整理すると，

$$g=\begin{cases} m^2+8m+10=(m+4)^2-6 & \left(m\leqq-\dfrac{7}{2}\right) \\ m-\dfrac{9}{4} & \left(-\dfrac{7}{2}\leqq m\leqq-\dfrac{3}{2}\right) \\ m^2+4m=(m+2)^2-4 & \left(m\geqq-\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$

g を m の関数とみると

$m\leqq-\dfrac{7}{2}$ において，$m=-4$ のとき最小値 -6

$-\dfrac{7}{2}\leqq m\leqq-\dfrac{3}{2}$ において，$m=-\dfrac{7}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{23}{4}$

$m\geqq-\dfrac{3}{2}$ において，$m=-\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{15}{4}$

であるから，m がすべての実数の範囲を変化するとき

$m=-4$ のとき g の最小値 -6　(答)

$\boxed{9}$

(1)　$f(x) = M$ となる x がちょうど 3 つあるのは

$$M = f(0) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f(2)$$

のときである。$0 < \alpha < \beta < 2$ より

$$f(0) = |\alpha\beta| = \alpha\beta$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \left|\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\right| = \frac{(\alpha-\beta)^2}{4} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} - \alpha\beta$$

$$f(2) = |(2-\alpha)(2-\beta)| = (2-\alpha)(2-\beta) = 4 - 2(\alpha+\beta) + \alpha\beta$$

であるから，$f(0) = f(2)$ より

$$\alpha + \beta = 2$$

$f(0) = f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ より

$$\alpha\beta = \frac{2^2}{4} - \alpha\beta \qquad \therefore\ \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

解と係数の関係より，$\alpha,\ \beta$ を 2 解とする 2 次方程式は

$$x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$0 < \alpha < \beta < 2$ を考え，

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}},\ \beta = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}},\ M = \alpha\beta = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

(2)　$1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = mx$ が接するとき，

2 次方程式

$$-\left(x - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = mx$$

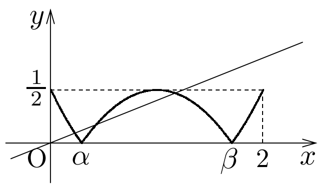
すなわち

$$x^2 + (m-2)x + \frac{1}{2} = 0$$

は重解をもつから，

$$(\text{判別式}) = (m-2)^2 - 4\cdot\frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore\ m = 2 - \sqrt{2}$$



$0 \leqq x \leqq 2$ において $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = mx$ が異なる 3 点で交わる条件をグラフから求めて，

$$0 < m < 2 - \sqrt{2} \text{ かつ } f(1) = \frac{1}{2} < m\cdot 2$$

$$\therefore\ \frac{1}{4} < m < 2 - \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

$\boxed{10}$ $a \neq 0$ より

$$①\iff x^2-\frac{1}{a}x+2-\frac{1}{2a}=0$$

であることを考えて

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2-\frac{1}{a}x+2-\frac{1}{2a}\\&=\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a^2}+2-\frac{1}{2a}\\&=\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{8a^2-2a-1}{4a^2}\\&=\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{(4a+1)(2a-1)}{4a^2}\end{aligned}$$

とおく。

(1) 方程式①が $-\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 2$ の範囲で重解でないただ 1 つの解をもつ条件を考えると，

(i) $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{19}{9}-\dfrac{1}{6a}=0$ のとき

$$a=\frac{3}{38}$$

であり，このとき

$$f(x)=x^2-\frac{38}{3}x-\frac{13}{3}=\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-13)$$

より，もう一つの解は $x=13$ となって条件を満たす。

(ii) $f(2)=6-\dfrac{5}{2a}=0$ のとき

$$a=\frac{5}{12}$$

であり，このとき

$$f(x)=x^2-\frac{12}{5}x+\frac{4}{5}=(x-2)\left(x-\frac{2}{5}\right)$$

より，もう一つの解は $x=\dfrac{2}{5}$ となって条件を満たさない。

(iii) $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)f(2) \neq 0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフが x 軸 $(y=0)$ と $-\dfrac{1}{3}<x<2$ で交わると考えて，$f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ と $f(2)$ が互いに異符号となることより

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)f(2)=\left(\frac{19}{9}-\frac{1}{6a}\right)\left(6-\frac{5}{2a}\right)<0$$

$a>0$ より

$$\left(a-\frac{3}{38}\right)\left(a-\frac{5}{12}\right)<0 \qquad \therefore\ \frac{3}{38}<a<\frac{5}{12}$$

以上より，求める a の範囲は

$$\frac{3}{38} \leqq a < \frac{5}{12} \quad (答)$$

(2)　方程式①が(重解の場合も含めて) 2 解とも $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 2$ の範囲にあるための条件は，$y = f(x)$ のグラフと x 軸が $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 2$ において(接する場合も含めて) 2 点とも共有すると考えて，

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{2a}\right) = \dfrac{(4a+1)(2a-1)}{4a^2} \leqq 0 \\ f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{19}{9} - \dfrac{1}{6a} \geqq 0 \\ f(2) = 6 - \dfrac{5}{2a} \geqq 0 \\ -\dfrac{1}{3} \leqq \dfrac{1}{2a} \leqq 2 \end{cases}$$

$a > 0$ を考えあわせて

$$\frac{5}{12} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$$

(1)の結果とあわせて，求める a の範囲は

$$\frac{3}{38} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$$

(注)

1°　結果論ではあるが，(1)を求めるだけであれば，

$$g(x) = 2ax^2 - 2x + 4a - 1$$

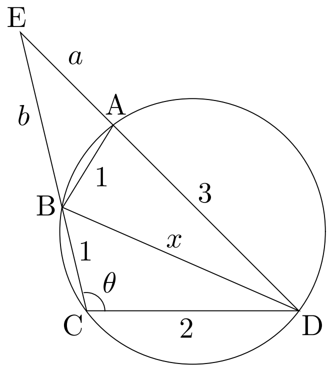
とおいた方がやや処理は楽になる。全体的には，2 次の係数を 1 にしておく方が無用の場合分けをしなくても済む。

2°　(2)だけを解くのであれば，(1)の考察は効率が悪く，

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)f(2) \leqq 0 \ と\ f\left(-\frac{1}{3}\right)f(2) > 0 \ に場合分け$$

する方が作業も少なく，見通しも良い。

$\boxed{11}$



(1)　$\mathrm{BD}=x$，$\angle\mathrm{BCD}=\theta$ とおく。

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle\mathrm{BAD}=\pi-\theta$$

$\triangle\mathrm{ABD}$ および $\triangle\mathrm{BCD}$ において余弦定理より

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{1^2+3^2-x^2}{2\cdot1\cdot3}=\frac{10-x^2}{6}$$

$$\cos\theta=\frac{1^2+2^2-x^2}{2\cdot1\cdot2}=\frac{5-x^2}{4}$$

補角の公式より $\cos(\pi-\theta)+\cos\theta=0$ であるから

$$2(10-x^2)+3(5-x^2)=0$$

$$5(7-x^2)=0 \qquad \therefore\ x=\mathrm{BD}=\sqrt{\boxed{7}}\,\text{(エ)}$$

$$\cos\theta=\frac{5-7}{4}=-\frac{1}{2} \qquad \therefore\ \theta=\angle\mathrm{BCD}=\frac{\overset{\text{(オ)}}{\boxed{2}}}{\underset{\text{(カ)}}{\boxed{3}}}\pi$$

(2)　四角形 ABCD の面積は

$$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot3\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\overset{\text{(キ)}}{\boxed{5}}}{\underset{\text{(ク)}}{\boxed{4}}}\sqrt{\underset{\text{(ケ)}}{\boxed{3}}}$$

(3)　$\triangle\mathrm{BCD}$ に正弦定理を適用することにより，円 O の半径 R および面積 S は

$$R=\frac{\sqrt{7}}{2\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \qquad \therefore\ S=\pi R^2=\frac{\overset{\text{(コ)}}{\boxed{7}}}{\underset{\text{(サ)}}{\boxed{3}}}\pi$$

(4)　AD の延長と BC の延長の交点を E とし，$\mathrm{AE}=a$，$\mathrm{BE}=b$ とおくと，

$\triangle\mathrm{EAB}\backsim\triangle\mathrm{ECD}$ より

$$\frac{b+1}{a}=\frac{a+3}{b}=\frac{2}{1}$$

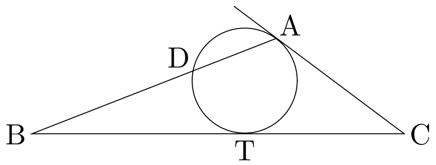
$$\begin{cases} b+1=2a \\ 2b=a+3 \end{cases} \qquad \therefore\ a=\frac{5}{3},\ b=\frac{7}{3},\ b+1=\frac{10}{3},\ a+3=\frac{14}{3}$$

3 辺 BC, CD, DA に接する円は $\triangle\mathrm{ECD}$ の内接円であり，その半径を r として $\triangle\mathrm{ECD}$ の面積を 2 通りに表すと

$$\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}+2+\frac{14}{3}\right)r=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi \qquad \therefore\ r=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \pi r^2=\frac{\overset{\text{(シ)}}{\boxed{1}}}{\underset{\text{(ス)}}{\boxed{3}}}\pi$$

$\boxed{12}$



(1)　余弦定理より

$$BC^2 = 10^2 + 6^2 - 2\cdot 10\cdot 6\cdot \cos 120^\circ$$
$$= 100 + 36 + 60 = 196$$
$$\therefore\ BC = 14 \quad (\text{答})$$

(2)　$\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 6\cdot \sin 120^\circ = 15\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

(3)　$BT : TC = 4 : 3$ であるから，(1)より

$$BT = \frac{4}{4+3}BC = 8$$

点 B に関する方べきを考え，

$$BA\cdot BD = BT^2$$
$$10\cdot(10 - AD) = 8^2 \qquad \therefore\ AD = \frac{18}{5} \quad (\text{答})$$

(4)　$BT : TC = 4 : 3$ と (2)より

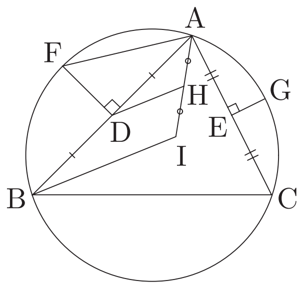
$$\triangle ATC = \frac{3}{4+3}\triangle ABC = \frac{3}{7} \times 15\sqrt{3} = \frac{45\sqrt{3}}{7} \quad (\text{答})$$

(5)　接弦定理より

$$\angle ATD = 180^\circ - \angle BAC = 60^\circ$$

$\triangle ADT$ において，正弦定理より

$$r = \frac{AD}{2\sin 60^\circ} = \frac{18}{5\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \quad (\text{答})$$



$\boxed{13}$ $\triangle$ABI において，中点連結定理より

$$\mathrm{DH} /\!/ \mathrm{BI}$$

であり，BI は $\angle$ABC の二等分線であるから

$$\angle \mathrm{ADH} = \angle \mathrm{ABI} = \boxed{\frac{\beta}{2}} \ (\text{ア})$$

AI は $\angle$CAB の二等分線であるから

$$\angle \mathrm{HAD} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{CAB} = \boxed{\frac{\alpha}{2}} \ (\text{イ})$$

CI の延長と外接円 O との交点を P とすると $\angle \mathrm{PCA} = \angle \mathrm{PCB}$ であるから

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BP}$$

となって P は F と一致し，

$$\angle \mathrm{FCA} = \angle \mathrm{FCB}$$

$$\therefore\ \angle \mathrm{DAF} = \angle \mathrm{BAF} = \angle \mathrm{BCF} = \boxed{\frac{\gamma}{2}} \ (\text{ウ})$$

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ より

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{HAF} + \angle \mathrm{FDH} &= \angle \mathrm{HAD} + \angle \mathrm{DAF} + \angle \mathrm{FDA} + \angle \mathrm{ADH} \\ &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} \\ &= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underset{(\text{エ})}{\boxed{\pi}}\end{aligned}$$

となり，四角形 AFDH はある円に内接する。よって，

$$\angle \mathrm{AFH} = \angle \mathrm{ADH} = \boxed{\frac{\beta}{2}} \ (\text{オ})$$

四角形 AFDH の外接円の半径を R とおき，$\triangle$AFD と $\triangle$ADH に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{DF}}{\sin\angle \mathrm{DAF}} = 2R = \frac{\mathrm{AH}}{\sin\angle \mathrm{ADH}}$$

$$\therefore\ \mathrm{DF} : \mathrm{AH} = \sin\angle \mathrm{DAF} : \sin\angle \mathrm{ADH} = \sin\underset{(\text{カ})}{\boxed{\frac{\gamma}{2}}} : \sin\underset{(\text{キ})}{\boxed{\frac{\beta}{2}}}$$

四角形 AHEG についても同様にして，

$$\angle \mathrm{GAE} = \angle \mathrm{GBC} = \underset{(\text{ク})}{\boxed{\frac{\beta}{2}}},\quad \angle \mathrm{HGA} = \angle \mathrm{HEA} = \angle \mathrm{ICA} = \underset{(\text{ケ})}{\boxed{\frac{\gamma}{2}}}$$

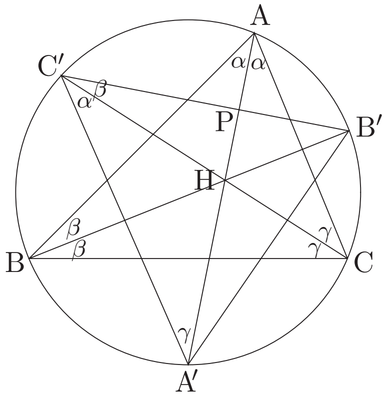
$$\mathrm{AH} : \mathrm{EG} = \sin\angle \mathrm{HEA} : \sin\angle \mathrm{GAE} = \sin\frac{\gamma}{2} : \sin\frac{\beta}{2} = \mathrm{DF} : \mathrm{AH}$$

ゆえに，

$$\mathrm{DF}\cdot\mathrm{EG} = \mathrm{AH}^2 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{AI}\right)^2 \qquad \therefore\ 4\mathrm{DF}\cdot\mathrm{EG} = \mathrm{AI}^2$$

(証明おわり)

14



AA', BB', CC' はそれぞれ $\triangle ABC$ の内角の二等分線であるから，$\triangle ABC$ の内心 H で交わることがわかり，

$$\angle BAA' = \angle CAA' = \alpha$$
$$\angle ABB' = \angle CBB' = \beta$$
$$\angle BCC' = \angle ACC' = \gamma$$

とおくと，円周角の性質より

$$\angle AA'C' = \angle ACC' = \gamma$$
$$\angle A'C'C = \angle A'AC = \alpha$$
$$\angle B'C'C = \angle B'BC = \beta$$

が成り立つ。

線分 AA' と辺 $B'C'$ の交点を P として $\triangle A'PC'$ に注目すると，「三角形の外角の大きさはそれと隣り合わない 2 つの内角の大きさの和に等しい」から，

$$\begin{aligned}\angle APC' &= \angle PC'A' + \angle PA'C' \\ &= \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ\end{aligned}$$

であり，

$$AA' \perp B'C'$$

である。

他の場合も同様に示せるから

$$BB' \perp C'A', \quad CC' \perp A'B'$$

であり，交点 H は $\triangle A'B'C'$ の垂心である。　(証明おわり)

(別法)　CC' が $\angle ACB$ の二等分線であることより，点 C' は弧 AB を二等分する。
よって，点 C' における外接円の接線は辺 AB に平行であり，線分 AA' には平行ではないから，点 C' から AA' に平行に直線を引くと点 C' 以外に外接円と交点 Q をもつ。弧 QA' と弧 AC' は長さが等しく，

$$\angle QC'A' = \angle ACC' = \gamma$$

が示されるから，$\angle QC'B' = \alpha + \beta + \gamma$ が得られる。

$\boxed{15}$

(1) E と F の順序を決め，E と F の間に入る文字の並びを決めたところで，以上をひとまとめにして残りの文字との並びを考えるとよい。

E と F の間にちょうど 3 文字が入る並べ方は

$$2 \times (4 \times 3 \times 2) \times 2 = \underset{(ア)}{\boxed{96}} \text{ 通り,}$$

E と F の間にちょうど 2 文字が入る並べ方は

$$2 \times (4 \times 3) \times 3! = \underset{(イ)}{\boxed{144}} \text{ 通り,}$$

E と F の間にちょうど 1 文字が入る並べ方は

$$2 \times 4 \times 4! = \underset{(ウ)}{\boxed{192}} \text{ 通り}$$

ある。

(2) まず A, B, C, D を一列に並べ，その両端と隙間あわせて 5 ヶ所のうちの 2 ヶ所に E と F を別々に入れると考えて，E と F が隣り合わない並べ方は

$$4! \times 5 \times 4 = \underset{(エ)}{\boxed{480}} \text{ 通り}$$

ある。

(注) E と F が隣り合う並べ方 $5! \times 2$ 通りを並べ方の総数 $6!$ から引いてもよい。

(3) E と F の間に A が入る並べ方は，まず A, A, A, B, C, D を並べ，AAA の部分を EAF または FAE に置き換えると考えることにより，

$$\frac{6!}{3!} \times 2 = 6 \times 5 \times 4 \times 2 = \underset{(オ)}{\boxed{240}} \text{ 通り}$$

E と F の間に A と B がともに入る並べ方は，まず A, A, A, A, C, D を並べ，AAAA の部分は両端を E と F，間を A と B に置き換えると考えることにより，

$$\frac{6!}{4!} \times 2 \times 2 = (6 \times 5) \times 4 = \underset{(カ)}{\boxed{120}} \text{ 通り}$$

E と F の間に C が入らない並べ方は，まず A, B, C, C, C, D を並べ，CCC の部分は C, E, F を C が端にくるように並べると考えることにより，

$$\frac{6!}{3!} \times 2 \times 2 = (6 \times 5 \times 4) \times 4 = \underset{(キ)}{\boxed{480}} \text{ 通り}$$

$\boxed{16}$

(1) 辺 3 本からなる経路は，A から B, D, E のいずれかに進み，それぞれ G への経路が 2 通りずつあるから，

$$3 \times 2 = \underset{(セ)}{\boxed{6}} \text{ 通り}$$

(2) 対角線 1 本と辺 1 本とからなる経路は，C, F, H, B, D, E のいずれを経由するかにより，$\underset{(ソ)}{\boxed{6}}$ 通りある。

(3) B, D, E からは対角線 1 本と辺 1 本で G には移動できないから，

まず最初に C, F, H に移動することが必要

である。ところが，C, F, H のいずれからも辺 2 本で G には移れないから，

対角線 1 本と辺 2 本からなる経路は $\underset{(タ)}{\boxed{0}}$ 通り

(4) 対角線 2 本と辺 1 本からなる経路を，辺の移動が何番目かで分けて考える。

(i) 初めに辺を移動する経路は，B, D, E の 2 点を経由するから

$${}_3P_2 = 6 \text{ 通り}$$

(ii) 辺の移動が 2 番目である経路は，初めに C, F, H のいずれかを経由し，次に G へ向かわない辺を移動することになるから

$$3 \times 2 = 6 \text{ 通り}$$

(iii) 最後に辺を移動する経路は，C, F, H の 2 点を経由するから

$${}_3P_2 = 6 \text{ 通り}$$

以上より，対角線 2 本と辺 1 本からなる経路は

$$6 \times 3 = \underset{(チ)}{\boxed{18}} \text{ 通り}$$

(5) 対角線 1 本と辺 3 本からなる経路を，対角線の移動が何番目かで分けて考える。

(i) 初めに対角線を移動する経路は，C, F, H のいずれかを経由し，G へ向かう辺以外の 3 辺を経由して G に到達するから，

$$3 \times 2 = 6 \text{ 通り}$$

(ii) 2 番目に対角線を移動する経路は，B, D, E の 2 点を経由したあと G まで 2 辺で移動するのは 2 通りずつあるから，

$${}_3P_2 \times 2 = 12 \text{ 通り}$$

(iii) 3 番目に対角線を移動する経路は，G から A へ逆戻りする経路を考えれば (ii)と同じであるから，12 通りある。

(iv) 最後に対角線を移動する経路は，G から A へ逆戻りする経路を考えれば (i)と同じであるから，6 通りある。

以上より，対角線 1 本と辺 3 本からなる経路は全部で

$$(6 + 12) \times 2 = \underset{(ツ)}{\boxed{36}} \text{ 通り}$$

$\boxed{17}$

(1)　3が素数であることに注意すると，abが3の倍数となるのはともに3で割り切れない場合の余事象であるから，求める確率は

$$1-\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=1-\frac{21}{45}=\frac{\boxed{8}}{\boxed{15}}\ \left(\frac{ソ}{タチ}\right)$$

(2)　$a+b$が3の倍数になるのは，

(i)　a，bがともに3の倍数

(ii)　a，bの一方は1，4，7，10，他方は2，5，8

のいずれかの場合であるから，求める確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2+4\times3}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{3+12}{45}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\ \left(\frac{ツ}{テ}\right)$$

(3)　abが4の倍数となるのは，

(i)　2数がともに偶数

(ii)　2数の一方が4または8，他方は奇数

のいずれかの場合であるから，求める確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2+2\times5}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{10+10}{45}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}\ \left(\frac{ト}{ナ}\right)$$

(4)　$a+b$が4の倍数となるのは，

(i)　4と8の2数

(ii)　2，6，10のうちの2数

(iii)　一方が1，5，9，他方が3，7

のいずれかの場合であるから，求める確率は

$$\frac{1+{}_3\mathrm{C}_2+3\times2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1+3+6}{45}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{9}}\ \left(\frac{ニ}{ヌ}\right)$$

$\boxed{18}$

(1)　$a=b=c$ となる確率を求めて，正三角形が作れる確率は

$$\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}\quad(\text{答})$$

(2)　正三角形ではない二等辺三角形となる 3 辺の長さの組合せは

$$\begin{aligned}&(1,\ 2,\ 2),\ (1,\ 3,\ 3),\ (1,\ 4,\ 4),\ (1,\ 5,\ 5),\ (1,\ 6,\ 6),\\&(2,\ 3,\ 3),\ (2,\ 4,\ 4),\ (2,\ 5,\ 5),\ (2,\ 6,\ 6),\\&(3,\ 2,\ 2),\ (3,\ 4,\ 4),\ (3,\ 5,\ 5),\ (3,\ 6,\ 6),\\&(4,\ 3,\ 3),\ (4,\ 5,\ 5),\ (4,\ 6,\ 6),\\&(5,\ 3,\ 3),\ (5,\ 4,\ 4),\ (5,\ 6,\ 6),\ (6,\ 4,\ 4),\ (6,\ 5,\ 5)\end{aligned}$$

a, b, c の順序も考えて，(正三角形でない)二等辺三角形が作れる確率は

$$\frac{21\times 3}{6^3}=\frac{7}{24}\quad(\text{答})$$

(注)　正三角形を二等辺三角形に含めると考えるならば，(1)の確率とあわせて

$$\frac{6}{6^3}+\frac{21\times 3}{6^3}=\frac{2+21}{2^3\cdot 3^2}=\frac{23}{72}$$

が求める確率となる。

(3)　三角形の成立条件

$$|a-b|<c<a+b$$

を満たす相異なる a, b, c の組合せは，

$$x<y<z<x+y$$

となる組 $(x,\ y,\ z)$ を拾い上げればよく，

$$\begin{aligned}&(2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 4,\ 5),\ (2,\ 5,\ 6),\\&(3,\ 4,\ 5),\ (3,\ 4,\ 6),\ (3,\ 5,\ 6),\ (4,\ 5,\ 6)\end{aligned}$$

の 7 組ある。a, b, c の順序も考えて，3 辺の長さが相異なる三角形が作れる確率は

$$\frac{7\times 3!}{6^3}=\frac{42}{6^3}$$

正三角形および (正三角形でない)二等辺三角形となる確率とあわせて，a, b, c を 3 辺の長さとする三角形が作れる確率は

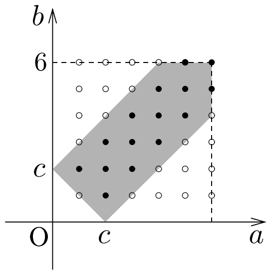
$$\frac{6}{6^3}+\frac{63}{6^3}+\frac{42}{6^3}=\frac{111}{6^3}=\frac{37}{72}\quad(\text{答})$$

(**別法**)　三角形の成立条件

$$|a-b|<c<a+b$$

を ab 平面上に図示して，格子点の個数を求める方針で直接数えることもできる。

c を固定して，ab 平面上に図示すると



$(a,\ b)$ の組の個数 x_c は

$$x_c = 6^2 - \frac{1}{2}c(c-1) - \frac{1}{2}(6-c)(7-c) \times 2 = \frac{3}{2}c(9-c) - 6$$

であるから，三角形ができる $(a,\ b,\ c)$ の総数 N は

$$N = \sum_{c=1}^{6} x_c = 6 + 15 + 21 + 24 + 24 + 21 = 111$$

よって，求める確率は

$$\frac{N}{6^3} = \frac{37}{72} \quad (\text{答})$$

$\boxed{19}$

(1)　1 回の操作で AAABBB → AAABBB となるのは，3 以下の目が出る場合であり，

$$\text{求める確率は}\ \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\ \left(\frac{\text{ア}}{\text{イ}}\right)$$

(2)　1 回目に BAAABB となれば，次に AAABBB とはなれないから，2 回の操作で AAABBB → AAABBB となるのは 2 回とも 3 以下の目が出る場合であるから，

$$\text{求める確率は}\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}\ \left(\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}\right)$$

(3)　3 回の操作で AAABBB → BBBAAA となるのは

AAABBB → BAAABB → BBAAAB → BBBAAA

と移動する場合であるから，求める確率は

$$\frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{36}}\ \left(\frac{\text{オ}}{\text{カキ}}\right)$$

(4)　1 回目の操作のあとは，確率 $\frac{1}{2}$ ずつでAAABBB または BAAABB となり，前者の場合は次にどの目が出ても 2 番目は A，後者の場合は次に 1 の目が出たときに限って 2 番目が A となるから，求める確率は

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{\boxed{7}}{\boxed{12}}\ \left(\frac{\text{ク}}{\text{ケコ}}\right)$$

(5)　一番左が A になるのは，最後の回で A を先頭にする場合であるから，

$$\text{求める確率は}\ \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\ \left(\frac{\text{サ}}{\text{シ}}\right)$$

(6)　5 回の操作で一番右が A となるのは，5 回とも A より右の位置を表す目が出る場合であるから，求める確率は

$$\frac{5!}{6^5} = \frac{\boxed{5}}{\boxed{324}}\ \left(\frac{\text{ス}}{\text{セソタ}}\right)$$

$\boxed{20}$

(1)　5 回続けて表が出る場合の余事象の確率を求めて，

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^5=\boxed{\frac{31}{32}}\ (ナ)$$

(2)(a)　硬貨 1 枚ごとに，5 回目を投げるのは 4 回続けて表が出る場合であるから，
5 回目を投げない確率は

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{16}$$

3 枚とも 5 回目を投げることがない確率は

$$\left(\frac{15}{16}\right)^3=\boxed{\frac{3375}{4096}}\ (ニ)$$

(b)　(a)と同様に考えて，4 回目を投げることがない確率は

$$\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}^3=\left(\frac{7}{8}\right)^3=\frac{343}{512}$$

5 回目を投げることがない確率から引くことにより，4 回目を投げてちょうど全部の硬貨がなくなる確率は

$$\frac{3375}{4096}-\frac{343}{512}=\frac{3375-343\times 8}{4096}=\boxed{\frac{631}{4096}}\ (ヌ)$$

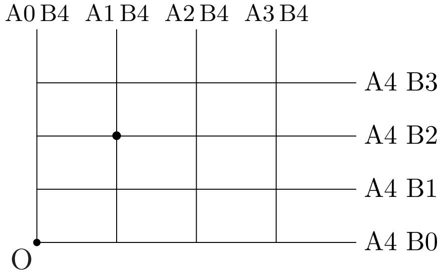
(c)　硬貨 1 枚ごとに，4 回投げて硬貨が残る確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

であるから，4 回目を投げて 3 枚のうち 1 枚の硬貨が残る確率は

$${}_3C_1\cdot\frac{1}{16}\left(\frac{15}{16}\right)^2=\boxed{\frac{675}{4096}}\ (ネ)$$

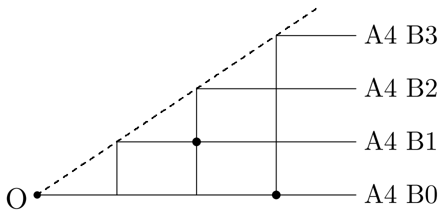
$\boxed{21}$ A, B のどちらか一方が 4 点になるまでの根元事象を，表が出るのを→で，裏が出るのを↑で表すと，次のような図式が得られる。



(1)　A が 1 点かつ B が 2 点の状況を経て A が勝者となるのは，図の (1, 2) を経て (4, 2) に到達する，または (1, 2) を経て (4, 3) に到達する場合であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4+2}\times 3\times 1+\left(\frac{1}{2}\right)^{4+3}\times 3\times 3=\frac{6+9}{2^7}=\frac{15}{128}\quad\text{(答)}$$

(2)　A の得点が B の得点以上である状態を保って A が勝者となる根元事象は,



のようになるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{4+1}\times 3+\left(\frac{1}{2}\right)^{4+2}\times(2\times 2+1\times 1)+\left(\frac{1}{2}\right)^{4+3}\times(2\times 2+1\times 1)$$
$$=\frac{8+12+10+5}{2^7}=\frac{35}{128}\quad\text{(答)}$$

(3)　(1)の上の図を参考にして，勝者が決まるまでの硬貨を投げる回数の期待値 E_1 は

$$E_1=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\times 2+5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\times 4\times 2$$
$$+6\times\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\times {}_5C_2\times 2+7\times\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\times {}_6C_3\times 2$$
$$=\frac{8+20+30+35}{2^4}=\frac{93}{16}\quad\text{(答)}$$

敗者の得点は，勝者が決まるまでに硬貨を投げた回数から 4 を引いたものであるから，敗者の得点の期待値 E_2 は

$$E_2=E_1-4=\frac{29}{16}\quad\text{(答)}$$

(注)　E_2 を律儀に書けば,

$$
\begin{aligned}
E_2 &= 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 4 \times 2 \\
&\qquad + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_5\mathrm{C}_2 \times 2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 \times {}_6\mathrm{C}_3 \times 2 \\
&= (4-4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 + (5-4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 4 \times 2 \\
&\qquad + (6-4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_5\mathrm{C}_2 \times 2 + (7-4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 \times {}_6\mathrm{C}_3 \times 2 \\
&= E_1 - 4\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 4 \times 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_5\mathrm{C}_2 \times 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 \times {}_6\mathrm{C}_3 \times 2\right\} \\
&= E_1 - 4 \times 1
\end{aligned}
$$

$\boxed{22}$

(1)　$105 = 3 \times 5 \times 7$ の正の約数は

$$3^c 5^d 7^e \quad (c,\ d,\ e \text{ はそれぞれ } 0 \text{ または } 1)$$

の形に表され，2 つの正の整数

$$a = 3^c 5^d 7^e,\ \ b = 3^k 5^l 7^m \quad (c,\ d,\ e,\ k,\ l,\ m \text{ はそれぞれ } 0 \text{ または } 1)$$

の最小公倍数が 105 となるのは，

$$\max\{c,\ k\} = \max\{d,\ l\} = \max\{e,\ m\} = 1$$

のときであるから，全部で

$$(2^2 - 1)^3 = 27 \text{ 通り}$$

ある。このうち，

$a = b$ となるものは 1 通り，

$a < b$ となるものと $a > b$ となるものは同数

あるから，

$$N(105) = \frac{27 - 1}{2} = 13 \quad \text{(答)}$$

(2)

$$2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

と素因数分解されるから，(1)と同様に考えて

$$N(2310) = \frac{(2^2 - 1)^5 - 1}{2} = 121 \quad \text{(答)}$$

$\boxed{23}$ 整数解を n とすると

$$n^2+(2m+5)n+(m+3)=0$$
$$(2n+1)m+n^2+5n+3=0$$
$$(2n+1)m+(2n+1)\left(\frac{1}{2}n+\frac{9}{4}\right)+\frac{3}{4}=0$$
$$4(2n+1)m+(2n+1)(2n+9)+3=0$$
$$\therefore\ (2n+1)(4m+2n+9)=-3$$

積が -3 となる整数の組合せを考えて，

$$(2n+1,\ 4m+2n+9)=(1,\ -3),\ (3,\ -1),\ (-1,\ 3),\ (-3,\ 1)$$
$$\therefore\ (n,\ m)=(0,\ -3),\ (1,\ -3),\ (-1,\ -1),\ (-2,\ -1)$$

求める整数 m は

$$m=-3,\ -1\quad(\text{答})$$

(注) 上の解答では，次数の低い m について整理して，n^2+5n+3 を $2n+1$ で割ると余りが定数(0 次式)になることに注目して変形しているが，そのまま n の 2 次式とみて変形することもできる。定数項 $m+3$ に m^2 の項がないことに注意すると

$$\begin{aligned}&n^2+(2m+5)n+(m+3)\\&=n^2+(2m+5)n+\frac{1}{2}(2m+6)\\&=n^2+(2m+5)n+\frac{1}{2}\left(2m+\frac{9}{2}\right)+\frac{3}{4}\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+2m+\frac{9}{2}\right)+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

別の変形方法として，

$$n^2+(2m+5)n+(m+3)=n(n+2m)+m+5n+3$$

の(文字式としての) 2 次の項 $n(n+2m)$ に注目して

$$\begin{aligned}n(n+2m)+m+5n+3&=(n+a)(n+2m+b)+c\\&=n(n+2m)+2am+(a+b)n+ab+c\end{aligned}$$

($a,\ b,\ c$ は定数)

とおいて，係数比較による連立方程式から $a,\ b,\ c$ を求めてもよい。

$\boxed{24}$

(1)　x が有理数であるとすれば，互いに素な自然数 m，n を用いて

$$x = \pm\frac{m}{n}$$

と表される。

$$7x^2 = \frac{7m^2}{n^2}$$

は整数であるから $7m^2$ は n^2 の倍数であるが，m^2 と n^2 は互いに素である(共通な素因数をもたない)から，

7 は n^2 で割り切れる。

7 は(1 でない)平方因数をもたないから

$$n^2 = 1 \qquad \therefore\ n = 1$$

よって，$x = \pm m$ は整数である。　(証明おわり)

(2)　k を整数として，

$$(2k)^2 = 4k^2$$
$$(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$$

となるから，偶数の平方は 4 の倍数，奇数の平方は 4 で割ると 1 余る。

a^2，b^2 および a^2-7b^2 について 4 で割った余りは

a^2	0	0	1	1
b^2	0	1	0	1
a^2-7b^2	0	1	1	2

ですべての場合が尽くされるから，a^2-7b^2 が 4 の倍数となるのは，a と b がともに偶数である場合に限られる。　(証明おわり)

(3)　$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2 - 7s^2 = t$ が整数ならば，

$r^2 - 7(2s)^2 = 4t$ は 4 の倍数　…… Ⓐ

であり，r は整数であるから

$7(2s)^2 = r^2 - 4t$ も整数　…… Ⓑ

である。

$2s$ は有理数であるから，Ⓑおよび (1)より

$2s$ は整数

であり，Ⓐおよび (2)より

$2s$ は偶数

となる。

したがって，

$$s = \frac{2s}{2} \text{ は整数}$$

である。　(証明おわり)