

1

- (1) $x^3 - 1$ を $(x - 1)^2$ で割った余りは であり, $x^2 - 1$ で割った余りは である。また, $x^3 - 27$ を $x^2 - 5x + 6$ で割った余りは である。
- (2) n を 3 以上の整数とする。 $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$ を $x - 1$ で割った余りは となるから, $x^n - 1$ を $(x - 1)^2$ で割った余りは である。また, $x^n - 1$ を $x^2 - 1$ で割った余りは, n が偶数のとき であり, n が奇数のとき である。
- (3) n を 3 以上の整数とする。 $x^n - 3^n$ を $(x - 3)^2$ で割った余りは であり, $x^2 - 5x + 6$ で割った余りは である。

(同志社大)

2 多項式 $f(x)$ について, 次の条件(i), (ii), (iii)を考える。

(i) $x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

(ii) $f(1 - x) = f(x)$

(iii) $f(1) = 1$

このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 条件(i)をみたす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下であることを示せ。
- (2) 条件(i), (ii), (iii)をすべてみたす多項式 $f(x)$ を求めよ。

(東北大)

3 $\alpha = \frac{3 + \sqrt{7}i}{2}$ とする. ただし, i は虚数単位である. 次の問に答えよ.

- (1) α を解にもつような 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ (p, q は実数) を求めよ.
- (2) 整数 a, b, c を係数とする 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ について, 解の 1 つは α であり, また $0 \leq x \leq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする. このような整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.

(神戸大)

4 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ は異なる 3 つの解 p, q, r をもつ. さらに, $2p^2 - 1, 2q - 1, 2r - 1$ も同じ方程式の異なる 3 つの解である. a, b, c, p, q, r の組をすべて求めよ.

(一橋大)

5

定数 a は実数であるとする。方程式

$$(x^2 + ax + 1)(3x^2 + ax - 3) = 0$$

を満たす実数 x はいくつあるか。 a の値によって分類せよ。

(京大)

6 正の実数 a, b, c が $a + 5b + 7c = 12$ を満たすとする。

(1) 実数 p, q, r, x, y, z に対して, $(px + qy + rz)^2 + (py - qx)^2 + (qz - ry)^2 + (rx - pz)^2$ を因数分解せよ。

(2) 実数 p, q, r, x, y, z に対して, 不等式

$$(p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (px + qy + rz)^2$$

が成り立つことを示せ。また, 等号が成り立つのはどのようなときか。

(3) $\sqrt{a} + \sqrt{5b} + \sqrt{7c}$ の最大値を求めよ。

(鳥取大)

7 連立不等式

$$y \geq 0, \quad x + y \leq 4, \quad 2x + y \leq 6, \quad y - 3x \leq 12$$

が表す領域を D とする。次の問いに答えよ。

- (1) 領域 D を図示せよ。
- (2) 点 (x, y) が領域 D にあるとき, $4x - y$ の最大値と最小値を求めよ。また, そのときの x, y の値を求めよ。
- (3) 点 (x, y) が領域 D にあるとき, $2y - x^2$ の最大値と最小値を求めよ。また, そのときの x, y の値を求めよ。

(同志社大)

8 xy 平面において, 点 $(5\sqrt{3}, 0)$ を中心とする半径 5 の円を C , 点 $(-4\sqrt{3}, 0)$ を中心とする半径 4 の円を D とする。 C, D の共通接線のうち, C, D が異なる側にあり傾きが正であるものを ℓ , 傾きが負であるものを ℓ' とし, C, D が同じ側にあり傾きが正であるものを m とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) 直線 m の方程式を求めよ。
- (3) 三直線 ℓ, ℓ', m のすべてに接し C, D と異なる円を E, E' とする。二円 E, E' の中心の x 座標を求めよ。
- (4) (3) の円 E, E' の半径を求めよ。

(早大)

- 9 座標平面上の 3 点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, -1)$ に対し,

$$\angle APC = \angle BPC$$

をみたす点 P の軌跡を求めよ。ただし $P \neq A, B, C$ とする。

(東大)

- 10 実数 a, t に対し, 方程式

$$x^2 + y^2 + 2tx - 4ax + 2ty + 4|a - 3| + 28 = 0 \quad (*)$$

を考える。次の各問いに答えよ。

- (1) t がどのような実数であっても方程式 (*) が円を表すような a の範囲を求めよ。
- (2) $a = 6$ とする。このとき, 方程式 (*) は t がどのような実数であっても円を表す。 t がすべての実数を動くとき, 方程式 (*) によって表される円の周が通過する領域を D とする。 xy 平面を全体集合とするとき, D の補集合を図示せよ。

(横浜国大)

- 11 a を正の実数とする。点 (x, y) が、不等式 $x^2 \leq y \leq x$ の定める領域を動くとき、常に $\frac{1}{2} \leq (x-a)^2 + y \leq 2$ となる。 a の値の範囲を求めよ。

(一橋大)

- 12 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき、 $\cos \theta - \sin \theta$ の値を求めよ。

(2) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき、 $2 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ の値を求めよ。

(3) $2 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leq -1$ のとき、 $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$ の最大値と最小値を求めよ。

(岡山大)

13

- (1) $\cos 3\theta = f(\cos \theta)$ を満たす 3 次式 $f(x)$ と, $\cos 4\theta = g(\cos \theta)$ を満たす 4 次式 $g(x)$ を求めなさい。また, 多項式 $h(x)$ で,

$$(x-1)h(x) = g(x) - f(x)$$

を満たすものを求めなさい。解答欄には答だけを書くこと。

- (2) $h(x)$ を (1) で求めた多項式とする。 $0 \leq \theta \leq \pi$ とするとき, $h(\cos \theta) = 0$ であるためには, $\theta = \frac{2\pi}{7}$ または $\frac{4\pi}{7}$ または $\frac{6\pi}{7}$ であることが必要十分であることを証明しなさい。
- (3) $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ の値を求めなさい。値だけでなく, なぜそうなるのかも書くこと。

(慶大)

14 k を実数とし, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + k(\sqrt{3} \sin x + \cos x)$$

とする。

- (1) $t = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ とおくとき, $f(x)$ を t の 2 次式で表せ。
- (2) $k = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, $0 < x < \pi$ の範囲で方程式 $f(x) = 0$ の解を求めよ。
- (3) $0 < x < \pi$ の範囲で方程式 $f(x) = 0$ は任意の実数 k に対して解をもつことを示せ。

(北大)

15 $0 \leq x < 2\pi$ のとき, 方程式

$$2\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3 \sin x \cos x = 0$$

を満たす x の個数を求めよ.

(京大)

16 $A = \log_2 \frac{64}{\sqrt[5]{27}}$ と $f(x) = 6^x - 3^{x+1} - 2^{x+2} + 12$ について考える。

(1) $\log_2 8 < \log_2 9$ より $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} < \log_2 3 \dots\dots \textcircled{1}$

同様に, $27 < 32$ を用いると $\log_2 3 < \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \dots\dots \textcircled{2}$

また, $A = \boxed{\text{ソ}} - \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \log_2 3$ だから, A を小数で表したときの整数部分は

$\boxed{\text{ツ}}$ で, 小数第 1 位の数は $\boxed{\text{テ}}$ である。

(2) $f(x)$ を変形すると

$$f(x) = (2^x - \boxed{\text{ト}})(\boxed{\text{ナ}}^x - \boxed{\text{ニ}})$$

(1) の $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

$$\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} < \log_3 4 < \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

したがって, 方程式 $f(x) = 0$ の解は, 小さい順に $\log_{\boxed{\text{ヒ}}}\boxed{\text{フ}}$, $\log_{\boxed{\text{ヘ}}}\boxed{\text{ホ}}$ である。

(東邦大 薬)

17 a を正数とし, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$$

によって定義する。このとき

$$f(x+y) + f(x-y) = \text{1} f(x)f(y)$$

である。また自然数 n に対して

$$f(nx) = \text{2} f(x)f((n - \text{3})x) - f((n - \text{4})x)$$

となる。とくに

$$f(3x) = \text{5} f(x) \text{6} - \text{7} f(x)$$

である。これらの結果から 3 次方程式

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{25}{28} = 0$$

の実数解が

$$\frac{\text{8} \sqrt{\text{9}} + \text{8} \sqrt{\text{9}}}{2}$$

であることが分かる。

(慶大)

18 a を実数とする。 x に関する方程式 $\log_3(x-1) = \log_9(4x-a-3)$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。

(新潟大)

19 k を正の定数として, $f(x) = x^2(1-x)$, $g(x) = k(1-x)$ とする。関数 $h(x)$ を

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \leq g(x) \text{ のとき}) \\ g(x) & (f(x) > g(x) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める。

- (1) 関数 $f(x)$ が極大となる x を求めよ。
- (2) 関数 $h(x)$ が極大となる x を求めよ。

(学習院大)

20 関数

$$y = x^3 + 1$$

のグラフを曲線 C とします。正数 $t > 0$ に対して C 上の点 $P(t, t^3 + 1)$ を定め, P における C の接線 l_1 と x 軸との交点を R とします。次に, C 上に P と異なる点 Q を, Q における C の接線 l_2 が P を通るようにとります。そして l_2 と x 軸との交点を S とします。

- (1) $\triangle PRS$ の面積を t で表しましょう。
- (2) (1) で考えた $\triangle PRS$ の面積の最小値を求めましょう。

(慶大)

21 a を $a > 1$ をみたす実数とし, $f(x) = x^3 - 3ax - a(a+1)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) x の方程式 $f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもつことを示せ。
- (2) x の方程式 $f(x) = 0$ の実数解を c とする。このとき $c = t + \frac{a}{t}$ をみたす実数 t が存在することを示し, そのような t に対して, $t^3 + \frac{a^3}{t^3} = a(a+1)$ であることを示せ。
- (3) c を求めよ。

(横浜国大)

22 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = x^2 - x \int_0^2 |f(t)| dt$$

を満たしているとする。このとき, $f(x)$ を求めよ。

(東北大)

- 23 2つの2次関数 $f(x) = 2x^2 - 2x$, $g(x) = -x^2 + x$ を考える。 $y = f(x)$ のグラフを F , $y = g(x)$ のグラフを G とし, $0 < t < 1$ を満たす t に対する G 上の点を $P(t, g(t))$ とする。また, 原点を O とし, 直線 OP とグラフ F の O 以外の交点を Q とする。線分 OP とグラフ G で囲まれた図形の面積を S_1 とし, 線分 PQ と2つのグラフ F , G で囲まれた図形の面積を S_2 とすると,

$$S_1 = \frac{\boxed{(4)}}{\boxed{(5)}} t^3, \quad S_2 = \frac{\boxed{(6)}}{\boxed{(7)}} \left(t^3 + \boxed{(8)} t^2 - \boxed{(9)} t + \boxed{(10)} \right)$$

である。また, $S_1 + S_2$ が $0 < t < 1$ の範囲で最小となるのは,

$$t = \frac{-\boxed{(11)} + \boxed{(12)} \sqrt{\boxed{(13)}}}{\boxed{(14)}}$$

のときである。

(慶大)

- 24 $a > 0$ とし, 2つの放物線を

$$C_1 : y = x^2 + ax$$

$$C_2 : y = \frac{1}{4}x^2$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) 放物線 C_1 上の点 $(t, t^2 + at)$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 放物線 C_1, C_2 の両方に接する直線の方程式を求めよ。
- (3) (2)で求めた接線のうち, 傾きが正のものを l とする。放物線 C_1, C_2 および接線 l で囲まれた部分の面積が 1 となるような a の値を求めよ。

(福岡教育大)

25 定数 a, b に対して, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ とおく。曲線 $y = f(x)$ が x 軸と相異なる 3 点で交わっているとき, 次の問いに答えなさい。

- (1) a, b の満たす条件を求めなさい。
- (2) $b < 0$ のとき, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた 2 つの図形の面積の和を a, b を用いて表しなさい。
- (3) $b > 0$ のとき, 曲線 $y = f(x)$ を x 軸で囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなるための a, b の条件を求めなさい。

(東京理大)

26 平面上に $\triangle ABC$ があり, 実数 k に対して $3\vec{PA} + 5\vec{PB} + 7\vec{PC} = k\vec{BC}$ を満たすように点 P を定めるとする。

(1) $k = \boxed{\text{ア}}$ のとき, 点 P は辺 AB 上にある。このとき, $\vec{AP} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \vec{AB}$ と表

されるので, 点 P は辺 AB を $\boxed{\text{エ}} : 1$ に内分していることがわかる。この点 P を P_1 とおく。

また, $k = \boxed{\text{オカ}}$ のとき, 点 P は辺 AC 上にある。このとき, $\vec{AP} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \vec{AC}$ と

表されるので, 点 P は辺 AC を $\boxed{\text{ケ}} : 1$ に内分していることがわかる。この点 P を P_2 とおく。

四角形 P_1BCP_2 の面積は $\triangle ABC$ の面積の $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ 倍である。

(2) $k = 0$ のとき, 直線 AP と辺 BC の交点を D とする。このとき, $\vec{AP} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \vec{AD}$ と

表されるので, 点 P は線分 AD を $\boxed{\text{ソ}} : 1$ に内分していることがわかる。この点 P を P_3 とおく。

点 D は辺 BC を $\boxed{\text{タ}} : \boxed{\text{チ}}$ に内分している。したがって, $\triangle ABD$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の $\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ 倍であり, $\triangle ABP_3$ の面積は $\triangle ABC$ の $\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ 倍である。

(成蹊大)

27 平面上に点 O を中心とする半径 1 の円周 S を考える。以下の問いに答えよ。

(1) S 上の 2 点 A, B に対し, $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OE}$ となる点 E をとる。
 $\vec{OE} \neq \vec{0}$ のとき, 線分 OE が角 AOB を二等分することを示せ。

(2) S に内接する三角形 ABC が条件

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$$

を満たすとする。このとき三角形 ABC はどのような三角形になるか, 証明付きで述べよ。

(3) S に内接する四角形 $ABCD$ が条件

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$$

を満たすとする。このとき四角形 $ABCD$ はどのような四角形になるか, 証明付きで述べよ。

(広島大)

28 xyz 座標空間において, 3 点 $A(1, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(5, 2, 0)$ を考える。
 また, 連立不等式

$$x - 3y + 3 \leq 0, \quad 3x - 2y + 2 \geq 0, \quad 2x + y - 8 \leq 0$$

で表される xy 平面上の領域を K とし, 点 P は K 上を動くものとする。

(i) 領域 K を xy 平面に図示せよ。

(ii) 2 点 A, B を通る直線と xy 平面との交点 D の座標を求めよ。

(iii) $\triangle CDP$ の面積を S とする。四面体 $BCDP$ の体積 V_1 , および四面体 $ABCP$ の体積 V_2 を, S を用いて表せ。ここに, D は (ii) で求めた点である。

(iv) 点 P が K 上を動くときの, 四面体 $ABCP$ の体積 V_2 の最大値と最小値を求めよ。

(立教大)

29

座標空間の原点 $O(0, 0, 0)$ および 3 点 $A(1, 3, 2)$, $B(2, 1, 1)$, $C(-1, -1, 2)$ を考えます.

(1) $\angle AOB = \theta$ とすると $\sin^2 \theta = \frac{\boxed{(23)} \quad \boxed{(24)}}{\boxed{(25)} \quad \boxed{(26)}}$ となります. このことから $\triangle OAB$ の

面積を S とすると

$$S^2 = \frac{\boxed{(27)} \quad \boxed{(28)}}{\boxed{(29)} \quad \boxed{(30)}}$$

と計算されます.

(2) ベクトル $\vec{v} = (1, \boxed{(31)}, -\boxed{(32)})$ は

$$\vec{v} \perp \vec{OA}, \quad \vec{v} \perp \vec{OB}$$

を満たします. さらに \vec{v} と \vec{OC} の内積が $\vec{v} \cdot \vec{OC} = -\boxed{(33)} \quad \boxed{(34)}$ であることから, $\triangle OAB$ を含む平面と点 C との距離 h は

$$h^2 = \frac{\boxed{(35)} \quad \boxed{(36)}}{\boxed{(37)} \quad \boxed{(38)}}$$

を満たします. 以上から 4 点 O, A, B, C を頂点とする三角すいの体積 V は

$$V = \frac{\boxed{(39)} \quad \boxed{(40)}}{\boxed{(41)} \quad \boxed{(42)}}$$

と計算されます.

(3) 条件

$$3\alpha + \frac{1}{4}\beta + 5\gamma \leq 1, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0$$

を満たす実数 α, β, γ を用いて

$$\vec{OP} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC}$$

と表される点 P の全体が作る立体を E とします. E の体積は V の $\frac{\boxed{(43)} \quad \boxed{(44)}}{\boxed{(45)} \quad \boxed{(46)}}$ 倍

となります.

(慶大)

30 数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ は, 初項 a , 公差 d の等差数列であり, $a_3 = 12$ かつ $S_8 > 0$, $S_9 \leq 0$ をみたま。ただし, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ である。このとき, 次の各問に答えよ。(1), (2) は答のみ解答欄に記入せよ。

- (1) 公差 d がとる値の範囲を求めよ。
- (2) a_n ($n > 3$) がとる値の範囲を, n を用いて表せ。
- (3) $a_n > 0$, $a_{n+1} \leq 0$ となる n の値を求めよ。
- (4) S_n が最大となるときの n の値をすべて求めよ。また, そのときの S_n を d の式で表せ。

(早大)

31 座標平面上の点 (x, y) において, x, y がともに整数となる点を格子点という。いま, 格子点 (x, y) の x 座標と y 座標の和 $x + y$ を, この格子点の値と定義する。

連立不等式

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq n \\ 1 \leq y \leq n \end{cases} \quad (n \text{ は自然数})$$

で表される領域内にある格子点について, それぞれ格子点の値を定め, その総和を a_n とする。

- (1) a_1, a_2, a_3 を求めよ。
- (2) a_{n+1} を a_n と n を用いて表せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(立命館大)

- 32 $\{a_n\}$ を初項 a_1 が 7 で公差が 3 の等差数列とし, $\{b_n\}$ を初項 b_1 が 1 で公差が 5 の等差数列とする。 A を数列 $\{a_n\}$ の項として現れるすべての数の集合, B を数列 $\{b_n\}$ の項として現れるすべての数の集合とし, $C = A \cup B$ とする。 $\{c_n\}$ を C の要素を重複を許さずに小さい順にならべて得られる数列として, 以下の問いに答えよ。

(i) 数列 $\{c_n\}$ の第 7 項 c_7 は $\boxed{(29) \mid (30)}$ で, 第 11 項 c_{11} は $\boxed{(31) \mid (32)}$ である。

(ii) $\sum_{k=1}^7 c_k = \boxed{(33) \mid (34)}$ で, $\sum_{k=1}^{14} c_k = \boxed{(35) \mid (36) \mid (37)}$ である。

一般に, m を正の整数としたとき,

$$\sum_{k=1}^{7m} c_k = \frac{\boxed{(38) \mid (39) \mid (40)}}{\boxed{(41)}} m^2 + \frac{\boxed{(42) \mid (43)}}{\boxed{(44)}} m - \boxed{(45)}$$

である。

(iii) 数列 $\{d_n\}$ を, $d_n = \sum_{k=1}^n (c_{2k} - c_{2k-1})$ と定める。このとき, 数列 $\{d_n\}$ の第 77 項 d_{77} は $\boxed{(46) \mid (47) \mid (48)}$ で, 第 80 項 d_{80} は $\boxed{(49) \mid (50) \mid (51)}$ である。

(慶大)

33 10ℓの水が入った容器 A と 5ℓの水が入った容器 B と 1ℓの水が入った容器 C がある。次のような一連の操作(I), (II), (III)を行うことにする。

(I) 容器 A と容器 B の水量を調べ、水量の差の 10 分の 1 を水量の多い容器から水量の少ない容器へ移す。

(II) 1ℓの水を容器 C から容器 A へ移す。

(III) 1ℓの水を容器 B から容器 C へ移す。

一連の操作を n 回繰り返したときの容器 A の水量を a_n ℓ, 容器 B に水量を b_n ℓとする。このとき, a_n を n を用いて表せ。ただし, 容器から水があふれることはないものとする。

(埼玉大)

34 正数 a, b, x, y を考えます。 $a + b = 1$ ならば, すべての自然数 n に対して不等式

$$(ax + by)^n \leq ax^n + by^n$$

が成立することを証明してください。

(慶大)