$\boxed{1}$

(1)　x^3-1 を $(x-1)^2=x^2-2x+1$ および x^2-1 で割ると

$$x^3-1=(x^2-2x+1)(x+2)+\boxed{3x-3}=(x^2-1)x+\boxed{x-1}$$

x^3-27 を x^2-5x+6 で割ると

$$x^3-27=(x^2-5x+6)(x+5)+\boxed{19x-57}$$

(2)　$P(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ とおくと，剰余の定理より

$P(x)$ を $x-1$ で割った余りは $P(1)=\boxed{n}$

よって，$P(x)$ は

$$P(x)=(x-1)Q_1(x)+n \quad (Q_1(x)\text{ は多項式})$$

と表されるから，

$$x^n-1=(x-1)P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+\boxed{n(x-1)}$$

$P(x)$ を $x+1$ で割った余りは

$$\begin{aligned}P(-1)&=(-1)^{n-1}+(-1)^{n-2}+\cdots+(-1)+1\\&=\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}=\frac{1-(-1)^n}{2}\end{aligned}$$

であるから，

$$P(x)=(x+1)Q_2(x)+\frac{1-(-1)^n}{2} \quad (Q_2(x)\text{ は多項式})$$

と表され，

$$x^n-1=(x-1)P(x)=(x^2-1)Q_2(x)+\frac{1-(-1)^n}{2}(x-1)$$

よって，x^n-1 を x^2-1 で割った余りは

n が偶数のとき $\boxed{0}$，n が奇数のとき $\boxed{x-1}$

(3)　$Q(x)=x^{n-1}+3x^{n-2}+3^2x^{n-3}+\cdots+3^{n-2}x+3^{n-1}$ とおくと

$$x^n-3^n=(x-3)Q(x)$$

であり，$Q(3)=n\cdot3^{n-1}$ より

$$Q(x)=(x-3)Q_3(x)+n\cdot3^{n-1} \quad (Q_3(x)\text{ は多項式})$$

と表されるから，

$$x^n-3^n=(x-3)Q(x)=(x-3)^2Q_3(x)+\boxed{n\cdot3^{n-1}(x-3)}$$

$Q(x)$ を $x-2$ で割ると，

$$Q(2)=2^{n-1}+3\cdot2^{n-2}+\cdots+3^{n-2}\cdot2+3^{n-1}=\frac{2^n-3^n}{2-3}=3^n-2^n$$

より

$$Q(x)=(x-2)Q_4(x)+3^n-2^n \quad (Q_4(x)\text{ は多項式})$$

となるから，

$$\begin{aligned}x^n-3^n&=(x-3)\{(x-2)Q_4(x)+3^n-2^n\}\\&=(x^2-5x+6)Q_4(x)+\boxed{(3^n-2^n)(x-3)}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(1)　$f(x)$ を n 次式とすれば，(i)より $x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$ は多項式であるから，特に

$$x^4\cdot\frac{1}{x^n}=x^{4-n}\text{ は多項式(単項式)}$$

であり，

$$4-n\geqq 0\qquad\therefore\ n\leqq 4$$

よって，$f(x)$ の次数は 4 次以下である。　(証明おわり)

(2)　$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ($a,\ b,\ c,\ d,\ e$ は定数)とおくと，

$$x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4\left(\frac{a}{x^4}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x}+e\right)$$
$$=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$$

であるから，(i)より

$$a=e,\quad b=d$$

(ii), (iii)より

$$f(0)=f(1-0)=f(1)=1$$

であるから，因数定理により

$$f(x)=x(x-1)(ax^2+px+q)+1\quad(p,\ q\text{ は定数})$$

と表される。

$$f(1-x)=x(x-1)\{a(1-x)^2+p(1-x)+q\}+1$$
$$=x(x-1)\{ax^2-(2a+p)x+a+p+q\}+1$$

であるから，(ii)より

$$-(2a+p)=p\ \text{かつ}\ a+p+q=q\qquad\therefore\ p=-a$$

したがって，$f(x)$ は

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$$
$$=(x^2-x)(ax^2-ax+q)+1$$

と 2 通りに表されることになり，係数を比べると

$$b=-2a\ \text{かつ}\ c=a+q\ \text{かつ}\ b=-q\ \text{かつ}\ a=1$$
$$\therefore\ a=1,\ b=-2,\ c=3$$

以上より，求める多項式 $f(x)$ は

$$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1\quad(\text{答})$$

$\boxed{3}$

(1)　$\alpha = \dfrac{3+\sqrt{7}\,i}{2}$ のとき

$$2\alpha - 3 = \sqrt{7}\,i$$
$$(2\alpha-3)^2 = -7$$
$$4\alpha^2 - 12\alpha + 16 = 0 \qquad \therefore\ \alpha^2 - 3\alpha + 4 = 0$$

α が 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の解であるから

$$\alpha^2 + p\alpha + q = (3\alpha-4) + p\alpha + q = (p+3)\alpha + (q-4) = 0$$

$p+3$, $q-4$ は実数，α は虚数であるから

$$p+3=0 \ \text{かつ}\ q-4=0 \qquad \therefore\ p=-3,\ q=4 \quad (\text{答})$$

(注)

1°　本問は，「α を解にもつ 2 次方程式を(何でもよいから) 1 つ挙げよ」という問題ではない。そこで，上の解答のように(それ以外にないことも含めて)きちんと求めなければならない。

2°　今の教科書では扱わないが，複素共役の性質から

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \Longrightarrow \overline{\alpha^2 + p\alpha + q} = \overline{\alpha}^2 + p\overline{\alpha} + q = 0$$

が成り立つ。このことを認めると，解と係数の関係より

$$p = -(\alpha + \overline{\alpha}) = -3,\quad q = \alpha\overline{\alpha} = 4$$

と導くことができる。

(2)　x^3+ax^2+bx+c を x^2-3x+4 で割ると，恒等式

$$x^3+ax^2+bx+c$$
$$= (x^2-3x+4)(x+a+3) + (3a+b+5)x - 4a + c - 12 \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。仮定より，①に $x=\alpha$ を代入すると 0 になるから，

$$(3a+b+5)\alpha - 4a + c - 12 = 0$$

$3a+b+5$, $-4a+c-12$ は実数，α は虚数であるから

$$3a+b+5=0 \ \text{かつ}\ -4a+c-12=0$$
$$\therefore\ b=-3a-5,\ c=4a+12 \qquad \cdots\cdots ②$$

このとき，①は

$$x^3+ax^2+bx+c = (x^2-3x+4)(x+a+3)$$

となって実数解は $-a-3$ であるから，実数解についての仮定より

$$0 \leqq -a-3 \leqq 1 \qquad \therefore\ -4 \leqq a \leqq -3$$

a は整数であるから

$$a=-4 \ \text{または}\ a=-3$$

②より b, c も求めて

$$(a,\ b,\ c) = (-4,\ 7,\ -4),\ (-3,\ 4,\ 0) \quad (\text{答})$$

$\boxed{4}$ 解と係数の関係より

$$p+q+r=-a,\quad pq+pr+qr=b,\quad pqr=-c \qquad \cdots\cdots ①$$

$p=2p^2-1$ のときと $p \neq 2p^2-1$ のときを分けて考える。

(i) $p=2p^2-1$ のとき

$q=2q-1$ とすると，$r=2r-1$ すなわち $q=r=1$ となって仮定に反するから

$$q=2r-1 \text{ かつ } r=2q-1$$

ところが，このときも $3(q-r)=0$ となって不適である。

(ii)
$$\begin{cases} p=2q-1 & \cdots\cdots ② \\ q=2p^2-1 & \cdots\cdots ③ \\ r=2r-1 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

のとき，②かつ③より q を消去して

$$p=2(2p^2-1)-1$$

$$4p^2-p-3=0 \qquad \therefore\ (p-1)(4p+3)=0$$

$p=1$ のとき，②または③より $p=q=1$ となって仮定に反するから

$$p=-\frac{3}{4}$$

③より

$$q=2\times\frac{9}{16}-1=\frac{1}{8}$$

④より

$$r=1$$

であるが，$p\neq r$，$q\neq r$ をみたす。①より

$$a=-\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+1\right)=-\frac{-6+1+8}{8}=-\frac{3}{8}$$

$$b=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\cdot1+\frac{1}{8}\cdot1=\frac{-3-24+4}{32}=-\frac{23}{32}$$

$$c=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot1=\frac{3}{32}$$

題意の条件は q と r について対称であるから，

$$\begin{cases} p=2r-1 \\ r=2p^2-1 \end{cases}$$

の場合も同様である。

(iii)
$$\begin{cases} p=2q-1 & \cdots\cdots ② \\ r=2p^2-1 & \cdots\cdots ⑤ \\ q=2r-1 & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

のとき，②，⑥より

$$p=2(2r-1)-1=4r-3$$

⑤を代入して

$$p=4(2p^2-1)-3$$
$$8p^2-p-7=0 \qquad \therefore\ (p-1)(8p+7)=0$$

$p=1$ とすれば，⑤より $r=p$ となって不適であるから

$$p=-\frac{7}{8}$$

⑤，⑥より

$$r=2\times\frac{49}{64}-1=\frac{17}{32},\quad q=2\times\frac{17}{32}-1=\frac{1}{16}$$

①より

$$a=-\left(-\frac{7}{8}+\frac{1}{16}+\frac{17}{32}\right)=\frac{28-2-17}{32}=\frac{9}{32}$$
$$b=-\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{16}-\frac{7}{8}\cdot\frac{17}{32}+\frac{1}{16}\cdot\frac{17}{32}=-\frac{28+238-17}{512}=-\frac{249}{512}$$
$$c=\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{17}{32}=\frac{119}{4096}$$

題意の条件は q と r について対称であるから，

$$\begin{cases} p=2r-1 \\ q=2p^2-1 \\ r=2q-1 \end{cases}$$

の場合も同様である。

以上より，求める値の組は

$$\begin{aligned}(a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ r)=&\left(-\frac{3}{8},\ -\frac{23}{32},\ \frac{3}{32},\ -\frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ 1\right),\\ &\left(-\frac{3}{8},\ -\frac{23}{32},\ \frac{3}{32},\ -\frac{3}{4},\ 1,\ \frac{1}{8}\right),\\ &\left(\frac{9}{32}\ \ -\frac{249}{512},\ \frac{119}{4096},\ -\frac{7}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{17}{32}\right),\\ &\left(\frac{9}{32}\ \ -\frac{249}{512},\ \frac{119}{4096},\ -\frac{7}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{17}{32}\right)\end{aligned}$$

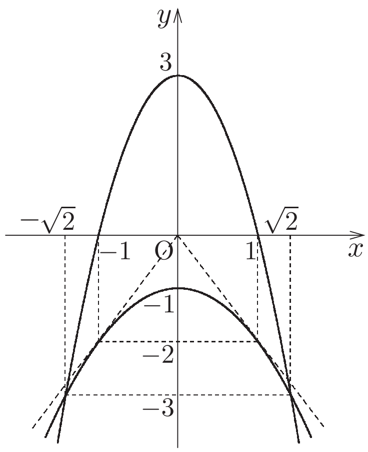
(答)

$\boxed{5}$　$(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$

$$\iff ax=-x^2-1 \text{ または } ax=-3x^2+3$$

であるから，2 つの放物線 $y=-x^2-1$，$y=-3x^2+3$ をあわせた図形と直線 $y=ax$ の共有点の個数が求める個数と同じものである。

　$y=-x^2-1$ と $y=-3x^2+3$ を図示すると，右図のようになる。



　直線 $y=ax$ と放物線 $y=-3x^2+3$ はつねに 2 点で交わる。$y=ax$ と $y=-x^2-1$が接するとき，2 次方程式

$$ax=-x^2-1$$

すなわち

$$x^2+ax+1=0$$

は重解をもつから，

$$(\text{判別式})=a^2-4=0$$

$$\therefore\ a=\pm 2$$

接点の x 座標は

$a=-2$ のとき $x=1$，

$a=2$ のとき $x=-1$

　以上のデータを図に盛り込んで，原点を通る直線 $y=ax$ との共有点の個数を読み取ると，求める個数は

$$\begin{cases} |a|<2 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ |a|=2 \text{ または } |a|=\dfrac{3}{\sqrt{2}} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 2<|a|<\dfrac{3}{\sqrt{2}} \text{ または } |a|>\dfrac{3}{\sqrt{2}} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{cases} \quad (\text{答})$$

$\boxed{6}$

(1)　$(px+qy+rz)^2+(py-qx)^2+(qz-ry)^2+(rx-pz)^2$

$= (p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2)+(p^2y^2+q^2x^2)+(q^2z^2+r^2y^2)+(r^2x^2+p^2z^2)$

$= p^2(x^2+y^2+z^2)+q^2(y^2+x^2+z^2)+r^2(z^2+y^2+x^2)$

$= (p^2+q^2+r^2)(x^2+y^2+z^2)$　(答)

(2)　(1)より

$$(p^2+q^2+r^2)(x^2+y^2+z^2)-(px+qy+rz)^2$$
$$=(py-qx)^2+(qz-ry)^2+(rx-pz)^2 \geqq 0$$

ここで，不等式の等号が成り立つための条件は

$py-qx=0$ かつ $qz-ry=0$ かつ $rx-pz=0$

$p:q=x:y$ かつ $q:r=y:z$ かつ $r:p=z:x$

$\therefore\ p:q:r=x:y:z$　　(証明おわり)

(3)　$p=q=r=1$，$x=\sqrt{a}$，$y=\sqrt{5b}$，$z=\sqrt{7c}$ として(2)の不等式を適用すると，

$$(\sqrt{a}+\sqrt{5b}+\sqrt{7c})^2 \leqq (1^2+1^2+1^2)(a+5b+7c)=3\times 12=36$$

$\sqrt{a}+\sqrt{5b}+\sqrt{7c}>0$ より

$$\sqrt{a}+\sqrt{5b}+\sqrt{7c} \leqq 6$$

ここで，不等式の等号は

$\sqrt{a}:\sqrt{5b}:\sqrt{7c}=1:1:1$ かつ $a+5b+7c=12$

すなわち

$a=5b=7c=4$

のとき成り立つから，

$\sqrt{a}+\sqrt{5b}+\sqrt{7c}$ の最大値は 6　(答)

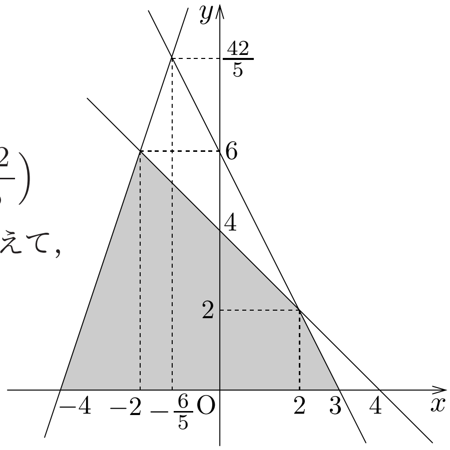
である。

7

(1) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+y=6 \end{cases} \iff (x,\ y)=(2,\ 2)$

$\begin{cases} x+y=4 \\ y-3x=12 \end{cases} \iff (x,\ y)=(-2,\ 6)$

$\begin{cases} 2x+y=6 \\ y-3x=12 \end{cases} \iff (x,\ y)=\left(-\dfrac{6}{5},\ \dfrac{42}{5}\right)$



原点が境界線に関してどちら側にあるかを考えて，領域

$$D:\begin{cases} y \geqq 0 \\ x+y \leqq 4 \\ 2x+y \leqq 6 \\ y-3x \leqq 12 \end{cases}$$

を図示すると，右上図の網目部分(境界を含む)となる。　(答)

(2) $4x-y=a$ とおくと，

$$y=4x-a$$

は傾き 4，y 切片 $-a$ の直線を表す。領域 D と共有点をもつ条件から

$$\begin{cases} (x,\ y)=(3,\ 0) \text{ のとき　最大値 } 12 \\ (x,\ y)=(-4,\ 0) \text{ のとき　最小値 } -16 \end{cases} \quad \text{(答)}$$

(3) $2y-x^2=b$ とおくと，

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{b}{2}$$

は $\left(0,\ \dfrac{b}{2}\right)$ を頂点とする下に凸の放物線を表す。

$y=-x+4$ と接するとき，2 次方程式

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{b}{2}=-x+4 \text{　すなわち　} x^2+2x+(b-8)=0$$

は重解をもつから，

$$\tfrac{1}{4}(\text{判別式})=1^2-(b-8)=0 \qquad \therefore\ b=9$$

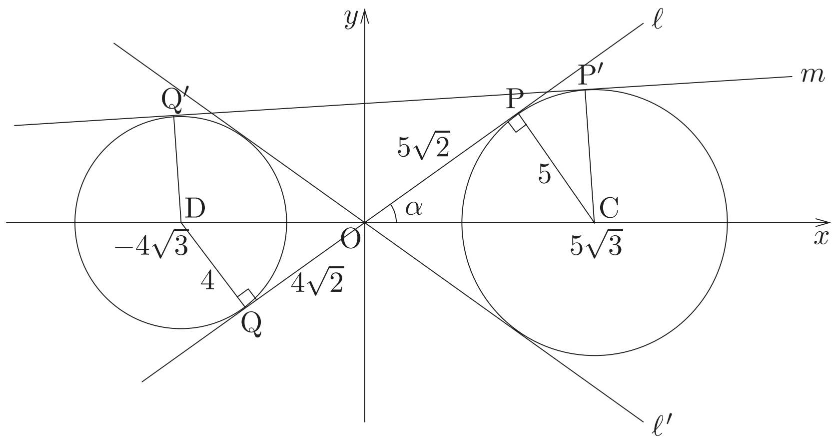
このとき，接点 $(-1,\ 5)$ は領域 D 内(境界線上)にあるから，b は最大となる。

放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{b}{2}$ は y 軸に関して対称であることに注意すると，$(x,\ y)=(-4,\ 0)$ のとき b は最小となる。

以上より，

$$\begin{cases} (x,\ y)=(-1,\ 5) \text{ のとき　最小値 } 9 \\ (x,\ y)=(-4,\ 0) \text{ のとき　最小値 } -16 \end{cases} \quad \text{(答)}$$

8



(1)　原点 O から円 C, D に接線を引き，その接点をそれぞれ P, Q とすると，

$$\mathrm{OC}:\mathrm{CP}=\mathrm{OD}:\mathrm{DQ}=\sqrt{3}:1$$

より

$$\triangle\mathrm{OCP}\backsim\triangle\mathrm{ODQ}\qquad\therefore\ \angle\mathrm{COP}=\angle\mathrm{DOQ}$$

であるから，ℓ は原点 O を通る。ℓ の傾きを $\tan\alpha$ をすると，

$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{OP}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，直線 ℓ の方程式は

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}x\quad(答)$$

(2)　m と円 C, D の接点をそれぞれ P′, Q′ とし，m と x 軸の交点を M とすると

$$\triangle\mathrm{MCP'}\backsim\triangle\mathrm{MDQ'},\ \ \mathrm{CP'}=5,\ \ \mathrm{DQ'}=4$$

より

$$\mathrm{DM}=4\mathrm{CD}=36\sqrt{3},\ \ \mathrm{M}(-40\sqrt{3},\ 0)$$

m の傾きを $\tan\beta$ とすると

$$\tan\beta=\frac{\mathrm{CP'}}{\mathrm{MP'}}=\frac{5}{\sqrt{(45\sqrt{3})^2-5^2}}=\frac{1}{\sqrt{(9\sqrt{3})^2-1}}=\frac{1}{11\sqrt{2}}$$

よって，直線 m の方程式は

$$y=\frac{1}{11\sqrt{2}}(x+40\sqrt{3})\quad(答)$$

(3)　$\ell:y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$，$\ell':y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ であるから，ℓ と ℓ' のなす角の二等分線は x 軸と y 軸である。円 E, E′ は ℓ と ℓ' の両方に接し，C, D とは異なるから，中心は y 軸上にあることになり，

$$x=0\quad(答)$$

(4)　E, E$'$ の中心を $(0,\ a)$，半径を r とすると，

$$r=\frac{\left|0-\sqrt{2}\,a\right|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{2}\,)^2}}=\frac{\left|0-11\sqrt{2}\,a+40\sqrt{3}\,\right|}{\sqrt{1^2+(-11\sqrt{2}\,)^2}}\qquad\cdots\cdots\ (*)$$

$(*)$の右の等式より

$$9\sqrt{2}\left|a\right|=\left|11\sqrt{2}\,a-40\sqrt{3}\,\right|$$
$$\pm\ 9\sqrt{2}\,a=11\sqrt{2}\,a-40\sqrt{3}$$
$$\therefore\ \ a=10\sqrt{6}\ \text{または}\ \sqrt{6}$$

$(*)$に代入して

円 E, E$'$ の半径は　20，2　(答)

$\boxed{9}$　P $\neq$ A, B, C のもとで，内積の性質より

$$\cos\angle\mathrm{APC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{CP}}|}$$

$$\cos\angle\mathrm{BPC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BP}}||\overrightarrow{\mathrm{CP}}|}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC} &\iff \cos\angle\mathrm{APC}=\cos\angle\mathrm{BPC}\\ &\iff \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|}\end{aligned}$$

　P$(x,\ y)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-1,\ y),\ \ \overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x+1,\ y),\ \ \overrightarrow{\mathrm{CP}}=(x,\ y+1)$$

であるから，

$$\frac{(x-1)x+y(y+1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\frac{(x+1)x+y(y+1)}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}$$

この式は

$$\left.\begin{array}{l}x(x-1)+y(y+1)=x(x+1)+y(y+1)=0\\ \text{または}\\ \bigl\{x(x-1)+y(y+1)\bigr\}\bigl\{x(x+1)+y(y+1)\bigr\}>0\end{array}\right.\quad\cdots\cdots\ ①$$

および

$$(x,\ y)\neq(1,\ 0),\ (-1,\ 0),\ (0,\ 1)\quad\cdots\cdots\ ②$$

のもとで，

$$\frac{(x^2+y^2-x+y)^2}{x^2+y^2-2x+1}=\frac{(x^2+y^2+x+y)^2}{x^2+y^2+2x+1}$$

であることと同値であり，さらに分母を払っても同値であるから

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+2x+1)\bigl\{(x^2+y^2)^2+2(-x+y)(x^2+y^2)+(-x+y)^2\bigr\}\\ &=(x^2+y^2-2x+1)\bigl\{(x^2+y^2)^2+2(x+y)(x^2+y^2)+(x+y)^2\bigr\}\end{aligned}$$

x^2+y^2 について整理すると，両辺から $(x^2+y^2)^3$ および $(2y+1)(x^2+y^2)^2$ の項が消えて，

$$\begin{aligned}&\bigl\{(2x+1)(-2x+2y)+(-x+y)^2\bigr\}(x^2+y^2)+(2x+1)(-x+y)^2\\ &=\bigl\{(-2x+1)(2x+2y)+(x+y)^2\bigr\}(x^2+y^2)+(-2x+1)(x+y)^2\end{aligned}$$

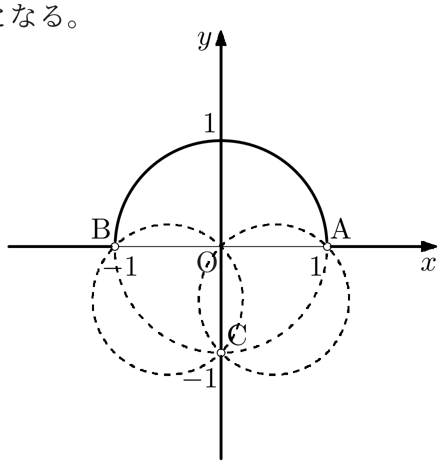
$$\begin{aligned}&(-3x^2+2xy+y^2-2x+2y)(x^2+y^2)+(2x+1)(x^2-2xy+y^2)\\ &=(-3x^2-2xy+y^2+2x+2y)(x^2+y^2)+(-2x+1)(x^2+2xy+y^2)\end{aligned}$$

$$2(2xy-2x)(x^2+y^2)+2\cdot 2x(x^2+y^2)+2(-2xy)=0$$

$$4xy(x^2+y^2-1)=0$$

$\therefore\ \ x=0$ または $y=0$ または $x^2+y^2=1$ 　　　　　 $\cdots\cdots$ ③

よって，点 P の軌跡は“①かつ②かつ③”であり，図示すると次図の太線部(○印の点は除く)となる。



(答)

(注) 軌跡の条件式を

$$(x^2+y^2+2x+1)\left\{(x^2+y^2)^2+2(-x+y)(x^2+y^2)+(-x+y)^2\right\}$$
$$=(x^2+y^2-2x+1)\left\{(x^2+y^2)^2+2(x+y)(x^2+y^2)+(x+y)^2\right\}$$

と整理したところで気が遠くなりそうだが，早早に $(x^2+y^2)^3$ と $(2y+1)(x^2+y^2)^2$ が消去されるので，実質的には 4 次の関係式である。

①において，

$x(x-1)+y(y+1)=0$ は 2 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ -1)$ を直径の両端とする円

$x(x+1)+y(y+1)=0$ は 2 点 $(0,\ 0)$，$(-1,\ -1)$ を直径の両端とする円

を表し，

$$\left\{x(x-1)+y(y+1)\right\}\left\{x(x+1)+y(y+1)\right\}>0$$

は 2 円両方の外側または 2 円両方の内側であることを表す。

$\boxed{10}$

(1)　$(*)$を平方完成すると

$$\begin{aligned}(x+t-2a)^2+(y+t)^2 &= (t-2a)^2+t^2-4|a-3|-28\\ &= 2t^2-4at+4a^2-4|a-3|-28\\ &= 2(t-a)^2+2a^2-4|a-3|-28\end{aligned}$$

となるから，

「tがどのような実数であっても$(*)$が円を表す」

$\iff$ 任意の実数tに対して，$2(t-a)^2+2a^2-4|a-3|-28>0$

$\iff$ $2a^2-4|a-3|-28>0$

である。

$a \geqq 3$のとき

$$2a^2-4(a-3)-28=2(a^2-2a-8)=2(a+2)(a-4)>0$$

$\therefore\ a>4$

$a \leqq 3$のとき

$$\begin{aligned}2a^2+4(a-3)-28 &= 2(a^2+2a-20)\\ &= 2\{(a+1)^2-21\}\\ &= 2(a+1+\sqrt{21})(a+1-\sqrt{21})>0\end{aligned}$$

$\therefore\ a<-1-\sqrt{21}$

以上より，求めるaの範囲は

$a<-1-\sqrt{21}$ または $a>4$　(答)

(2)　$a=6$のとき，$(*)$は

$$x^2+y^2+2tx-24x+2ty+40=0$$

$$2t(x+y)+x^2+y^2-24x+40=0$$

実数tが存在しない条件を考えて，Dの補集合は

$x+y=0$ かつ $x^2+y^2-24x+40 \neq 0$

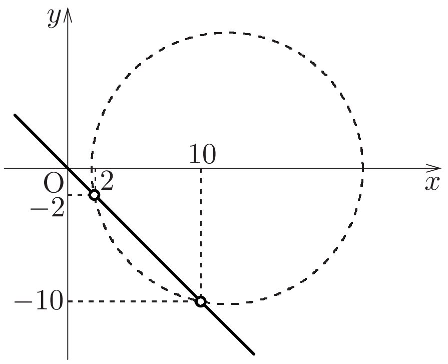
$\begin{cases}x+y=0\\ x^2+y^2-24x+40=0\end{cases}$ を解くと

$$x^2+(-x)^2-24x+40=0$$

$$2(x^2-12x+20)=2(x-2)(x-10)=0$$

$\therefore\ (x,\ y)=(2,\ -2),\ (10,\ -10)$

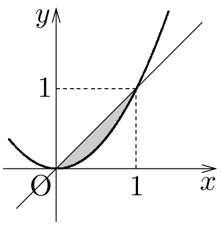
となるから，Dの補集合は次図のようになる。



(答)

(注)　(∗) は 2 点 (2, −2), (10, −10) を通る円を表すから，t がすべての実数を動くとき，その 2 点を通る円すべてを尽くすことさえ示すことができれば，結果は明らかである。図形的直感だけでそれを説明するのは難しいので，はじめから上のように数式処理で解く方が答案としては論じやすい。

$\boxed{11}$　不等式 $x^2 \leqq y \leqq x$ の定める領域は次図の網目部分(境界を含む)となる。



O(0, 0), A(1, 1) とおく。題意の条件は

$$\left\{(x,\ y)\,|\,x^2 \leqq y \leqq x\right\} \subset \left\{(x,\ y)\,\middle|\,\frac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2\right\}$$

であり，そのためには

線分 OA が $y \leqq -(x-a)^2 + 2$ の範囲にあり，
かつ
放物線 $y = x^2$ が $0 \leqq x \leqq 1$ でつねに $y \geqq -(x-a)^2 + \dfrac{1}{2}$
の範囲にある

ことが必要十分である。これを式で表せば，

$$\begin{cases} 0 \leqq -(0-a)^2 + 2 & \cdots\cdots ① \\ 1 \leqq -(1-a)^2 + 2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

かつ，$0 \leqq x \leqq 1$ においてつねに

$$x^2 - \left\{-(x-a)^2 + \frac{1}{2}\right\} \geqq 0$$

が成り立つことが条件である。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \left\{-(x-a)^2 + \frac{1}{2}\right\} \\ &= 2x^2 - 2ax + a^2 - \frac{1}{2} \\ &= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(a^2 - 1) \end{aligned}$$

とおくと，$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値 m は

$\dfrac{a}{2} \leqq 0$ のとき　$m = f(0) = a^2 - \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \dfrac{a}{2} \leqq 1$ のとき　$m = f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(a^2 - 1)$

$\dfrac{a}{2} \geqq 1$ のとき　$m = f(1) = a^2 - 2a + \dfrac{3}{2} = (a-1)^2 + \dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ m = \begin{cases} \left(a + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) & (a \leqq 0) \\ \dfrac{1}{2}(a+1)(a-1) & (0 \leqq a \leqq 2) \\ \left(a - 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a - 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) & (a \geqq 2) \end{cases}$$

$m \geqq 0$ より

$a \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ または $1 \leqq a$　　　$\cdots\cdots$ ③

である。

① $\iff a^2 \leqq 2 \iff -\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$

② $\iff (a-1)^2 \leqq 1 \iff -1 \leqq a - 1 \leqq 1 \iff 0 \leqq a \leqq 2$

①かつ②かつ③ より，求める a の範囲は

$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$　(答)

$\boxed{12}$

(1) 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin\theta+\cos\theta&=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\\&=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

と変形されるから，$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ より

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1-\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

$\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ を考え，

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3}{\sqrt{10}} \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \cos\theta-\sin\theta&=\sqrt{2}\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{3}{\sqrt{5}} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 2 倍角の公式および ①，②より

$$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{3}{5}$$

$$\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1=2\times\frac{9}{10}-1=\frac{4}{5}$$

加法定理より

$$\begin{aligned}2\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)&=2\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\pi\right)\\&=2\left\{\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{5}{6}\pi+\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{5}{6}\pi\right\}\\&=2\left\{\frac{4}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right\}\\&=-\frac{3+4\sqrt{3}}{5} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) $2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq-1$ のとき

$$\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)\leqq-\frac{1}{2}$$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ より $\dfrac{2}{3}\pi \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{5}{3}\pi$ であることと考え合わせて

$$\frac{2}{3}\pi \leqq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{4}{3}\pi \qquad \therefore\ \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi \qquad \cdots\cdots ③$$

加法定理を用いて

$$\begin{aligned}\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right)\\ &= 2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ &= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

と変形され，③より

$$\frac{2}{3}\pi \leqq \theta + \frac{\pi}{6} \leqq \pi$$

であることを考え，

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi \text{ のとき最大，} \theta + \frac{\pi}{6} = \pi \text{ のとき最小}$$

であり， $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ は

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最大値 } \sqrt{3}\text{，} \quad \theta = \frac{5}{6}\pi \text{ のとき最小値 } 0 \quad \text{(答)}$$

をとる。

(注) (1), (2)については，次のような別解も考えられる。

(1)　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ の両辺平方して

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{5}$$

$$\therefore\ 2\sin\theta\cos\theta = -\frac{4}{5}$$

$$(\cos\theta - \sin\theta)^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 4\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{5} - 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{9}{5}$$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ より $\cos\theta < 0$，$\sin\theta > 0$ であるから，

$$\cos\theta - \sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{5}} \quad \text{(答)}$$

(2)　加法定理と 2 倍角の公式より

$$\begin{aligned}2\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) &= 2\left(\cos 2\theta\cos\frac{\pi}{3} + \sin 2\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)\\ &= (\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) - \frac{4}{5}\sqrt{3} = -\frac{3 + 4\sqrt{3}}{5} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

$\boxed{13}$

(1) 3倍角の公式より

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

であるから，

$$f(x) = 4x^3 - 3x \quad (答)$$

2倍角の公式をくり返し適用して

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= 2\cos^2 2\theta - 1\\ &= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\end{aligned}$$

であるから，

$$g(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \quad (答)$$

$h(x)$ の定め方から，x の恒等式

$$\begin{aligned}(x-1)h(x) &= (8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x)\\ &= 8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1\\ &= (x-1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$h(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 \quad (答)$$

(2) $h(1) = 7 \neq 0$ より，$\theta = 0$ は $h(\cos\theta) = 0$ を満たさないから，

$$0 < \theta \leqq \pi$$

として考えてよい。このとき，

$$\begin{aligned}h(\cos\theta) = 0 &\iff (\cos\theta - 1)h(\cos\theta) = g(\cos\theta) - f(\cos\theta) = 0\\ &\iff \cos 4\theta - \cos 3\theta = 0\\ &\iff -2\sin\frac{7}{2}\theta\,\sin\frac{\theta}{2} = 0\\ &\iff \sin\frac{7}{2}\theta = 0 \qquad \left(\because\ 0 < \frac{\theta}{2} \leqq \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$0 < \dfrac{7}{2}\theta \leqq \dfrac{7}{2}\pi$ を考えて

$$\begin{aligned}&\iff \frac{7}{2}\theta = \pi \text{ または } 2\pi \text{ または } 3\pi\\ &\iff \theta = \frac{2\pi}{7} \text{ または } \frac{4\pi}{7} \text{ または } \frac{6\pi}{7}\end{aligned}$$

(証明おわり)

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{7}$，$\cos\dfrac{4\pi}{7}$，$\cos\dfrac{6\pi}{7}$ について

$$\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{4\pi}{7} = 2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} \neq 0$$

$$\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{6\pi}{7} = 2\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} \neq 0$$

$$\cos\frac{4\pi}{7}-\cos\frac{6\pi}{7}=2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}\neq 0$$

であるから，(2)より

3 次方程式 $h(x)=0$ の 3 解は $\cos\dfrac{2\pi}{7}$，$\cos\dfrac{4\pi}{7}$，$\cos\dfrac{6\pi}{7}$

である。したがって，(1)より，x の恒等式

$$\begin{aligned}h(x)&=8x^3+4x^2-4x-1\\&=8\left(x-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(x-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(x-\cos\frac{6\pi}{7}\right)\end{aligned}$$

が成り立つから，x^2 の係数を比べることにより

$$4=-8\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$\therefore\ \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}\quad(\text{答})$$

$\boxed{14}$　$f(x) = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + k(\sqrt{3}\sin x + \cos x)$

(1)　$t = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ とおくとき，

$$\begin{aligned} t^2 &= 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x \\ &= 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1 \\ &= (1 - \cos 2x) + \sqrt{3}\sin 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore\ \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = t^2 - 2$$

以上を $f(x)$ の式に代入して

$$f(x) = (t^2 - 2) + kt = t^2 + kt - 2 \quad \text{(答)}$$

(2)　加法定理を用いて合成すると

$$\begin{aligned} t = \sqrt{3}\sin x + \cos x &= 2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \qquad \cdots\cdots \text{①} \end{aligned}$$

$0 < x < \pi$ より

$$\frac{\pi}{6} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{7}{6}\pi \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

であるから，

$$-1 < t \leqq 2 \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

$k = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}t^2 - t - 2\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(t - \sqrt{3})(\sqrt{3}t + 2)$$

$f(x) = 0$ のとき，③より

$$t = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \qquad \therefore\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

②より

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi \qquad \therefore\ x = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} \quad \text{(答)}$$

(3)　①，②のもとで，方程式 $f(x) = 0$ は

$$t^2 + kt - 2 = 0$$

$g(t) = t^2 + kt - 2$ とおくと，$k = -1$ のとき

$$g(2) = 2k + 2 = 0$$

$k \neq -1$ のとき

$$g(-1)g(2) = (-k - 1)(2k + 2) = -2(k + 1)^2 < 0$$

となって，$-1 < t < 2$ において $g(t) = 0$ を満たす実数 t が存在する。

よって，任意の実数 k に対して，方程式 $g(t) = 0$ は③において解をもつから，方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \pi$ において解をもつ。　(おわり)

$\boxed{15}$

$$2\sqrt{2}\,(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3\sin x\cos x = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$t = \sin x + \cos x \qquad \cdots\cdots ②$$

とおく。両辺平方して

$$t^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x$$
$$= 1 + 2\sin x\cos x$$
$$\therefore\ \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2} \qquad \cdots\cdots ③$$

②，③より，方程式①は

$$2\sqrt{2}\,(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x) + 3\sin x\cos x = 0$$
$$2\sqrt{2}\,t\left(1 - \frac{t^2-1}{2}\right) + 3\cdot\frac{t^2-1}{2} = 0$$
$$\therefore\ \sqrt{2}\,t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3\sqrt{2}\,t + \frac{3}{2} = 0 \qquad \cdots\cdots ④$$

加法定理により，②を合成すると

$$t = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となるから，$\dfrac{\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} < 2\pi + \dfrac{\pi}{4}$ より

$$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

$f(t) = \sqrt{2}\,t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 - 3\sqrt{2}\,t + \dfrac{3}{2}$ とおくと

$$f'(x) = 3\sqrt{2}\,t^2 - 3t - 3\sqrt{2}$$
$$= 3\sqrt{2}\left(t^2 - \frac{t}{\sqrt{2}} - 1\right)$$
$$= 3\sqrt{2}\left\{\left(t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{9}{8}\right\}$$
$$= 3\sqrt{2}\left(t - \frac{1+3}{2\sqrt{2}}\right)\left(t - \frac{1-3}{2\sqrt{2}}\right)$$
$$= 3\sqrt{2}\,(t - \sqrt{2}\,)\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ における $f(t)$ の増減は

t	$-\sqrt{2}$		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$		↗	極大	↘	

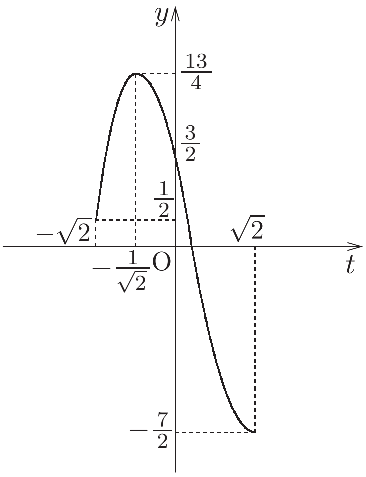
となり，

$$f\left(-\sqrt{2}\,\right)=-4-3+6+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+3+\frac{3}{2}=\frac{13}{4}$$

$$f\left(\sqrt{2}\,\right)=4-3-6+\frac{3}{2}=-\frac{7}{2}$$

であるから，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における $y=f(t)$ のグラフの概形は



よって，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における方程式④の実数解は 1 個であり，$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ の範囲にある。⑤より，$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}<2\pi+\frac{\pi}{4}$ において，$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ なる t に対して x は 2 つ存在するから，方程式①を満たす x は

2 個　(答)

である。

$\boxed{16}$

(1)　$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$,　$\log_2 9 = \log_2 3^2 = 2\log_2 3$ より

$$3 < 2\log_2 3 \qquad \therefore\ \frac{\underset{(サ)}{\boxed{3}}}{\underset{(シ)}{\boxed{2}}} < \log_2 3 \qquad \cdots\cdots ①$$

$3^3 < 2^5$ より

$$\log_2 3^3 < \log_2 2^5$$

$$3\log_2 3 < 5\log_2 2 = 5 \qquad \therefore\ \log_2 3 < \frac{\underset{(ス)}{\boxed{5}}}{\underset{(セ)}{\boxed{3}}} \qquad \cdots\cdots ②$$

$A = \log_2 \dfrac{64}{\sqrt[5]{27}}$ を変形すると

$$A = \log_2 \frac{2^6}{3^{\frac{3}{5}}} = \log_2 2^6 - \log_3 5^{\frac{3}{5}} = \underset{(ソ)}{\boxed{6}} - \frac{\underset{(タ)}{\boxed{3}}}{\underset{(チ)}{\boxed{5}}}\log_2 3$$

①, ②より

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2} < \frac{3}{5}\log_2 3 < 1 \qquad \therefore\ 5 < A < 6 - \frac{9}{10} = 5.1$$

であるから，

A の整数部分は $\underset{(ツ)}{\boxed{5}}$，小数第 1 位は $\underset{(テ)}{\boxed{0}}$

(2)　$f(x)$ を変形すると

$$f(x) = 2^x\cdot 3^x - 3\cdot 3^x - 4\cdot 2^x + 12 = \left(2^x - \underset{(ト)}{\boxed{3}}\right)\left(\underset{(ナ)}{\boxed{3}}^{\,x} - \underset{(ニ)}{\boxed{4}}\right)$$

$\log_3 4$ は

$$\log_3 4 = \log_3 2^2 = 2\log_3 2 = \frac{2}{\log_2 3}$$

と変形できるから，①, ②より

$$\frac{\underset{(ヌ)}{\boxed{6}}}{\underset{(ネ)}{\boxed{5}}} < \log_3 4 < \frac{\underset{(ノ)}{\boxed{4}}}{\underset{(ハ)}{\boxed{3}}} = \frac{8}{6} < \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

したがって，

$$f(x) = 0 \iff 2^x = 3 \text{ または } 3^x = 4$$

$$\iff x = \log_{\underset{(ヒ)}{\boxed{3}}} \underset{(フ)}{\boxed{4}} \text{ または } \log_{\underset{(ヘ)}{\boxed{2}}} \underset{(ホ)}{\boxed{3}}$$

$\boxed{17}$ 定義 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ と指数法則より

$$\begin{aligned}f(x+y)+f(x-y)&=\frac{a^{x+y}+a^{-x-y}}{2}+\frac{a^{x-y}+a^{-x+y}}{2}\\&=\frac{a^x(a^y+a^{-y})+a^{-x}(a^{-y}+a^y)}{2}\\&=\frac{(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y})}{2}\\&=\underset{(1)}{\boxed{2}}\,f(x)f(y)\end{aligned}$$

$x\mapsto(n-1)x$, $y\mapsto x$ とすると

$$f(nx)=\underset{(2)}{\boxed{2}}\,f(x)f((n-\underset{(3)}{\boxed{1}})x)-f((n-\underset{(4)}{\boxed{2}})x)$$

特に，$n=3$ のとき

$$\begin{aligned}f(3x)&=2f(x)f(2x)-f(x)\\&=2f(x)\{2f(x)^2-f(0)\}-f(x)\\&=4f(x)^3-3f(x)\end{aligned}$$

$g(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{25}{28}$ とおくと

$$g'(x)=3x^2-\frac{3}{4}=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{9}{14}<0$ より $g(x)=0$ を満たす実数 x は正の実数ただ一つである。

よって，3 次方程式 $g(x)=0$ の実数解は $x=f(t)$ とおくことができて，

$$g(x)=f(t)^3-\frac{3}{4}f(t)-\frac{25}{28}=\frac{1}{4}\left(f(3t)-\frac{25}{7}\right)=0$$

$$a^{3t}+a^{-3t}-\frac{50}{7}=0$$

$$7a^{6t}-50a^{3t}+7=(7a^{3t}-1)(a^{3t}-7)=0 \qquad \therefore\ a^{3t}=7^{\pm1}$$

a^t は実数であるから

$$a^t=7^{\pm\frac{1}{3}}$$

3 次方程式 $g(x)=0$ の実数解 $x=f(t)$ は

$$f(t)=\frac{\overset{(8)}{\boxed{7}}^{\frac{1}{\boxed{3}_{(9)}}}+\overset{(8)}{\boxed{7}}^{-\frac{1}{\boxed{3}_{(9)}}}}{2}$$

$\boxed{18}$ $\log_3(x-1)=\log_9(4x-a-3)$　$\cdots\cdots$ ①

真数条件より

$$x-1>0 \text{ かつ } 4x-a-3>0 \qquad \cdots\cdots ②$$

②のもとで，底の変換公式より

$$\log_9(4x-a-3)=\frac{\log_3(4x-a-3)}{\log_3 9}=\frac{1}{2}\log_3(4x-a-3)$$

であるから，①を変形すると

$$\log_3(x-1)^2=\log_3(4x-a-3)$$

(底) $=3>1$ より

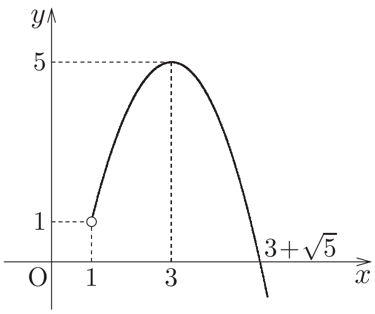
$$(x-1)^2=4x-a-3 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$\therefore\ a=-x^2+6x-4$$

ここまでを整理すると

$$① \iff ② \text{かつ} ③ \iff x>1 \text{ かつ } ③$$
$$\iff x>1 \text{ かつ } y=-x^2+6x-4 \text{ かつ } y=a$$

$x>1$ において，$y=-x^2+6x-4=-(x-3)^2+5$ を図示すると



直線 $y=a$ と 2 点を共有する範囲を求めて，

$$1<a<5 \quad (\text{答})$$

$\boxed{19}$

(1)　$f(x)=x^2(1-x)=-x^3+x^2$ を微分すると

$$f'(x)=-3x^2+2x=-3x\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

であり，この符号から $f(x)$ の増減は

x		0		$\frac{2}{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって，$f(x)$ は

$$x=\frac{2}{3}\quad(答)$$

で極大となる。

(2)　$$f(x)-g(x)=(x^2-k)(1-x)=-(x+\sqrt{k}\,)(x-\sqrt{k}\,)(x-1)$$

であるから，$h(x)$ の定義より

$$0<k\leqq 1 のとき\quad h(x)=\begin{cases} f(x) & (-\sqrt{k}\leqq x\leqq\sqrt{k},\ 1\leqq x) \\ g(x) & (x\leqq-\sqrt{k},\ \sqrt{k}\leqq x\leqq 1) \end{cases}$$

$$k\geqq 1 のとき\quad h(x)=\begin{cases} f(x) & (-\sqrt{k}\leqq x\leqq 1,\ \sqrt{k}\leqq x) \\ g(x) & (x\leqq-\sqrt{k},\ 1\leqq x\leqq\sqrt{k}) \end{cases}$$

$g(x)$ が単調減少であることに注意すると，関数 $h(x)$ が極大となる x は

$$\sqrt{k}\leqq\frac{2}{3}<1 のとき\ x=\sqrt{k},\quad その他のとき\ x=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad 0<k\leqq\frac{4}{9} のとき\ x=\sqrt{k},\quad k\geqq\frac{4}{9} のとき\ x=\frac{2}{3}\quad(答)$$

$\boxed{20}$

(1) P$(t,\ t^3+1)$ における C の接線 ℓ_1 の方程式は

$$y = 3t^2(x-t)+t^3+1 \qquad \therefore\ y = 3t^2x - 2t^3 + 1$$

$y=0$ とおくと，$t>0$ を考えて

$$x = \frac{2t^3-1}{3t^2} \qquad \therefore\ \mathrm{R}\left(\frac{2t^3-1}{3t^2},\ 0\right)$$

Q$(q,\ q^3+1)$ とおくと，ℓ_1と同様にして ℓ_2 の方程式は

$$y = 3q^2x - 2q^3 + 1$$

C の式と連立して y を消去すると，

$$x^3+1 = 3q^2x - 2q^3 + 1$$
$$x^3 - 3q^2x + 2q^3 = 0$$
$$(x-q)^2(x+2q) = 0$$

ℓ_2 と C は P で交わるから

$$t = -2q \qquad \therefore\ q = -\frac{t}{2}$$

$\mathrm{S}\left(\dfrac{2q^3-1}{3q^2},\ 0\right)$に代入して

$$\mathrm{S}\left(-\frac{t^3+4}{3t^2},\ 0\right)$$

$\triangle$PRS の面積を $M(t)$ とすると，$t>0$ を考えて

$$M(t) = \frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{RS}}\cdot y_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}\left|\frac{2t^3-1}{3t^2}+\frac{t^3+4}{3t^2}\right|(t^3+1)$$
$$= \frac{1}{2}\left|\frac{t^3+1}{t^2}\right|(t^3+1) = \frac{(t^3+1)^2}{2t^2} \quad (答)$$

（注）$C: y = x^3+1$ と $\ell_2: y = 3q^2x - 2q^3 + 1$ は $x=q$ において接するから，多項式の性質(重解条件)より

$$(x^3+1)-(3q^2x-2q^3+1) \text{ は } (x-q)^2 \text{ で割り切れる}$$

ことがわかる。上の解答は，この性質を活かして計算している。素直に

ℓ_2が点 P を通るから $t^3+1 = 3q^2t - 2q^3 + 1$

としてもよいが，その場合は重解条件は活かせない。

$\triangle$PRS の面積 $M(t)$ を求めるには，面積公式を用いてもよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \left(\frac{2t^3-1}{3t^2},\ 0\right) - (t,\ t^3+1) = -(t^3+1)\left(\frac{1}{3t^2},\ 1\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \left(-\frac{t^3+4}{3t^2},\ 0\right) - (t,\ t^3+1) = -(t^3+1)\left(\frac{4}{3t^2},\ 1\right)$$

であるから，

$$M(t) = \frac{1}{2}(t^3+1)^2\left|\frac{1}{3t^2}\cdot 1 - 1\cdot\frac{4}{3t^2}\right| = \frac{(t^3+1)^2}{2t^2}$$

(2)　(1)より

$$M(t)=\frac{(t^3+1)^2}{2t^2}=\frac{1}{2}\Bigl(\frac{t^3+1}{t}\Bigr)^2$$

相加・相乗平均の不等式より

$$\frac{t^3+1}{t}=t^2+\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t}\geqq 3\sqrt[3]{t^2\Bigl(\frac{1}{2t}\Bigr)^2}=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

ここで，不等式の等号は

$$t^2=\frac{1}{2t}\ \text{かつ}\ t>0,\ \text{すなわち}\ t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

のとき成り立つから，$\triangle$PRS の面積 $M(t)$ の最小値は

$$M\Bigl(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\Bigr)=\frac{1}{2}\Bigl(\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\Bigr)^2=\frac{9\sqrt[3]{4}}{8}\quad\text{(答)}$$

(**別解**)　$\dfrac{t^3+1}{t}=k$ とおくと

$$t^3-kt+1=0$$

$f(t)=t^3-kt+1$ とおき，方程式 $f(t)=0$ が正の実数解をもつ条件から，k のとり得る値の範囲を求める。

$$f'(t)=3t^2-k=3\Bigl(t+\sqrt{\frac{k}{3}}\Bigr)\Bigl(t-\sqrt{\frac{k}{3}}\Bigr)$$

の符号変化を調べることにより，$f(t)$ の $t>0$ における増減は

t	(0)		$\sqrt{\frac{k}{3}}$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	(1)	↘	極小	↗

であるから，条件は

$$f\Bigl(\sqrt{\frac{k}{3}}\Bigr)=-\frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}+1\leqq 0$$

$$\Bigl(\frac{k}{3}\Bigr)^{\frac{3}{2}}\geqq\frac{1}{2}\qquad\therefore\ k\geqq 3\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

これは必要十分条件であり，k が実際にとり得る値の範囲を表すから，

$$k=\frac{t^3+1}{t}\ \text{の最小値は}\ \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

であり，$\triangle$PRS の面積 $\dfrac{1}{2}k^2$ の最小値は

$$\frac{1}{2}\Bigl(\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\Bigr)^2=\frac{9\sqrt[3]{4}}{8}\quad\text{(答)}$$

(注)　曲線 $y=x^3+1$ の原点を通る接線を求め，直線 $y=kx$ と共有点をもつ条件から k の範囲を求めてもよい。

$\boxed{21}$

(1)　$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x+\sqrt{a}\,)(x-\sqrt{a}\,)$

x		$-\sqrt{a}$		$\sqrt{a}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$x \leqq \sqrt{a}$ において

$$f(x) \leqq f(-\sqrt{a}\,) = 2a\sqrt{a} - a^2 - a = -a(\sqrt{a}-1)^2 < 0$$

$x \geqq \sqrt{a}$ において $f(x)$ は単調増加であり，

$$f(\sqrt{a}\,) < 0,\quad f(2a) = 8a^3 - 7a^2 - a = a(a-1)(8a+1) > 0$$

であるから，方程式 $f(x)=0$ はただ 1 つの実数解をもつ。　(証明おわり)

(2)　$f(x) = f(-\sqrt{a}\,)$ とおくと

$$x^3 - 3ax - a(a+1) = 2a\sqrt{a} - a(a+1)$$
$$x^3 - 3ax - 2a\sqrt{a} = 0$$
$$(x+\sqrt{a}\,)^2(x-2\sqrt{a}\,) = 0 \qquad \therefore\ x = -\sqrt{a},\ 2\sqrt{a}$$

よって，$f(2\sqrt{a}\,) < 0$ であるから，方程式 $f(x)=0$ の実数解 c は

$$c > 2\sqrt{a}$$

$$c = t + \frac{a}{t} \iff t^2 - ct + a = 0$$

2 次方程式 $t^2 - ct + a = 0$ の判別式を D とすると

$$D = c^2 - 4a = (c+2\sqrt{a}\,)(c-2\sqrt{a}\,) > 0$$

であるから，$c = t + \dfrac{a}{t}$ を満たす実数 t が存在する。このとき

$$f\left(t+\frac{a}{t}\right) = \left(t+\frac{a}{t}\right)^3 - 3a\left(t+\frac{a}{t}\right) - a(a+1)$$
$$= t^3 + \frac{a^3}{t^3} - a(a+1) = 0$$

より

$$t^3 + \frac{a^3}{t^3} = a(a+1)$$

(おわり)

(3)　$$t^3 + \frac{a^3}{t^3} = a(a+1) \iff t^6 - (a^2+a)t^3 + a^3 = 0$$
$$\iff (t^3-a)(t^3-a^2) = 0$$
$$\iff t^3 = a \ \text{ または } \ t^3 = a^2$$

t は実数であるから

$$t = \sqrt[3]{a} \ \text{ または } \ t = \sqrt[3]{a^2}$$

方程式 $f(x)=0$ の実数解 c は

$$c = t + \frac{a}{t} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} \quad \text{(答)}$$

$\boxed{22}$

$$k = \int_0^2 |f(t)|\,dt \qquad \cdots\cdots ①$$

とおくと

$$f(x) = x^2 - kx \qquad \cdots\cdots ②$$

①かつ②を満たす条件を求めるべく，定積分を計算する。

(i)　$k \leqq 0$ のとき

$$k = \int_0^2 (x^2 - kx)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{k}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2k$$

これを計算すると $k = \dfrac{8}{9}$ となるが，$k \leqq 0$ を満たさない。

(ii)　$0 \leqq k \leqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} k &= \int_0^k (-x^2 + kx)\,dx + \int_k^2 (x^2 - kx)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2\right]_0^k + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{k}{2}x^2\right]_k^2 \\ &= 2\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)k^3 + \frac{8}{3} - 2k \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}k^3 - 3k + \frac{8}{3} = 0$$

$$k^3 - 9k + 8 = 0$$

$$(k-1)(k^2 + k - 8) = 0 \qquad \therefore\ k = 1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$0 \leqq k \leqq 2$ より

$$k = 1$$

(iii)　$k \geqq 2$ のとき

$$k = \int_0^2 (-x^2 + kx)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2\right]_0^2 = 2k - \frac{8}{3}$$

$$\therefore\ k = \frac{8}{3} \quad (k \geqq 2 \text{ を満たす})$$

以上より

$$k = 1,\ \frac{8}{3}$$

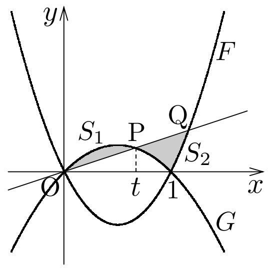
であり，②より

$$f(x) = x^2 - x \ \text{ または } \ f(x) = x^2 - \frac{8}{3}x \quad \text{(答)}$$

$\boxed{23}$ 直線 OP の傾きは $\dfrac{-t^2+t}{t}=-t+1$，方程式は

$$y=(-t+1)x$$

であるから，線分 OP とグラフ G で囲まれた図形の面積 S_1 は



$$S_1=\int_0^t\{-x^2+x-(-t+1)x\}\,dx$$

$$=-\int_0^t x(x-t)\,dx=\frac{\overset{(4)}{\boxed{1}}}{\underset{(5)}{\boxed{6}}}t^3$$

直線 OP とグラフ F の O 以外の交点 Q の x 座標は

$$2x^2-2x=(-t+1)x,\ x\neq 0$$

より

$$2x^2+(t-3)x=0 \qquad \therefore\ x=\frac{3-t}{2}$$

線分 OQ とグラフ F で囲まれた部分の面積に S_1を加え，グラフ F と x 軸で囲まれた部分およびグラフ G と x 軸で囲まれた部分の面積を引くことにより，線分 PQ とグラフ F, G で囲まれた図形の面積 S_2 は

$$S_2=\int_0^{\frac{3-t}{2}}\{(-t+1)x-(2x^2-2x)\}\,dx+S_1$$

$$-\int_0^1 g(x)\,dx-\int_0^1\{-f(x)\}\,dx$$

$$=\frac{2}{6}\left(\frac{3-t}{2}\right)^3+\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{6}(1-0)^3-\frac{2}{6}(1-0)^3$$

$$=\frac{1}{24}(27-27t+9t^2-t^3)+\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right)t^3+\frac{9}{24}t^2-\frac{27}{24}t+\frac{27-12}{24}$$

$$=\frac{\overset{(6)}{\boxed{1}}}{\underset{(7)}{\boxed{8}}}\left(t^3+\underset{(8)}{\boxed{3}}\,t^2-\underset{(9)}{\boxed{9}}\,t+\underset{(10)}{\boxed{5}}\right)$$

$S(t)=S_1+S_2$ とおくと，$0<t<1$ において

$$S'(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{8}(3t^2+6t-9)$$

$$=\frac{1}{8}(7t^2+6t-9)$$

$$=\frac{7}{8}\left(t+\frac{3}{7}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{9}{7}+9\right)$$

$$= \frac{7}{8}\left\{\left(t+\frac{3}{7}\right)^2 - \frac{8\times 9}{7^2}\right\}$$

$$= \frac{7}{8}\left(t+\frac{3}{7}+\frac{6\sqrt{2}}{7}\right)\left(t+\frac{3}{7}-\frac{6\sqrt{2}}{7}\right)$$

の符号変化は $t+\dfrac{3}{7}-\dfrac{6\sqrt{2}}{7} = t-\dfrac{-3+6\sqrt{2}}{7}$ と同じであり，$S(t)=S_1+S_2$ の増減は

x	(0)		$\dfrac{-3+6\sqrt{2}}{7}$		(1)
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

となるから，S_1+S_2 は

$$t = \frac{-\underset{(11)}{\boxed{3}}+\underset{(12)}{\boxed{6}}\sqrt{\underset{(13)}{\boxed{2}}}}{\underset{(14)}{\boxed{7}}}$$

のとき極小かつ最小である。

$\boxed{24}$

(1)　点 $(t,\ t^2+at)$ における C_1 の接線の方程式は

$$y=(2t+a)(x-t)+t^2+at$$

$$\therefore\ \ y=(2t+a)x-t^2\quad(答)\qquad\cdots\cdots ①$$

(2)　C_1 の接線①が C_2 にも接するとき，2 次方程式

$$\frac{1}{4}x^2=(2t+a)x-t^2$$

すなわち

$$x^2-4(2t+a)x+4t^2=0\qquad\cdots\cdots ②$$

は重解をもつから，

$$\tfrac{1}{4}(判別式)=4(2t+a)^2-4t^2=0$$

$$4(t+a)(3t+a)=0\qquad\therefore\ \ t=-a,\ -\frac{a}{3}$$

①に代入して，共通接線の方程式は

$$y=-ax+a^2,\ \ y=\frac{a}{3}x-\frac{a^2}{9}\quad(答)$$

(3)　$a>0$ より，傾き正の接線 l の方程式は

$$y=\frac{a}{3}x-\frac{a^2}{9}$$

(2)において $t=-\dfrac{a}{3}$ であり，②の重解は $2(2t+a)=\dfrac{2}{3}a$ であることを考え，(C_1 および C_2 の下方にあって) C_1，C_2 および l で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_{-\frac{a}{3}}^{0}\left\{x^2+ax-\left(\frac{a}{3}x-\frac{a^2}{9}\right)\right\}dx+\int_{0}^{\frac{2}{3}a}\left\{\frac{1}{4}x^2-\left(\frac{a}{3}x-\frac{a^2}{9}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{a}{3}}^{0}\left(x+\frac{a}{3}\right)^2dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{2}{3}a}\left(x-\frac{2}{3}a\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{a}{3}\right)^3\right]_{-\frac{a}{3}}^{0}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{2}{3}a\right)^3\right]_{0}^{\frac{2}{3}a}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{3}\right)^3-\frac{1}{12}\left(-\frac{2}{3}a\right)^3=\frac{a^3}{81}\times(1+2)=\frac{a^3}{27}$$

$S=1$ より

$$a^3=27$$

a は(正の)実数であるから

$$a=3\quad(答)$$

$\boxed{25}$

(1)　曲線 $y=x(x^2+ax+b)$ が x 軸と相異なる 3 点で交わるための条件は

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が 0 でない相異なる 2 実数解をもつ

ことであり，

$$(\text{判別式})=a^2-4b>0 \text{ かつ } 0^2+a\cdot 0+b\neq 0$$

$$\therefore\ b\neq 0 \text{ かつ } a^2-4b>0 \quad (\text{答}) \qquad \cdots\cdots ①$$

(2)　$f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)\ \ (\alpha<\beta)$ とおくと

$$\alpha+\beta=-a,\quad \alpha\beta=b \qquad \cdots\cdots ②$$

であり，$b<0$ のとき

$$\alpha<0<\beta$$

曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた 2 つの図形の面積和 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^0 f(x)\,dx+\int_0^\beta\{-f(x)\}\,dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_\alpha^0+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-\frac{b}{2}x^2\right]_0^\beta\\&=-\frac{1}{4}(\alpha^4+\beta^4)-\frac{a}{3}(\alpha^3+\beta^3)-\frac{b}{2}(\alpha^2+\beta^2)\end{aligned}$$

ここで，②より

$$\begin{aligned}&\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-2b\\&\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-a^3+3ab\\&\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(a^2-2b)^2-2b^2=a^4-4a^2b+2b^2\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}S&=-\frac{1}{4}(a^4-4a^2b+2b^2)-\frac{a}{3}(-a^3+3ab)-\frac{b}{2}(a^2-2b)\\&=\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{2}b^2 \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(3)　$b>0$ のとき

$$f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)\quad (\alpha<\beta<0 \text{ または } 0<\beta<\alpha)$$

と表されて，等積条件は

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx=\frac{1}{4}\alpha^4+\frac{a}{3}\alpha^3+\frac{b}{2}\alpha^2=0$$

$\alpha\neq 0$ より

$$\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{a}{3}\alpha+\frac{b}{2}=\frac{1}{4}\left(\alpha^2+\frac{4}{3}a\alpha+2b\right)=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

一方，

$$\alpha^2+a\alpha+b=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

であるから，③かつ④より

$$\frac{4}{3}a\alpha+2b=a\alpha+b \qquad \therefore\ \alpha=-\frac{3b}{a}$$

④に代入して

$$\left(-\frac{3b}{a}\right)^2+a\left(-\frac{3b}{a}\right)+b=\frac{9b^2}{a^2}-2b=0$$

$b>0$ も考えて，求める条件は

$$2a^2=9b\neq 0 \quad (\text{答})$$

(注)「3次関数のグラフが点対称な図形である」ことを認めるならば，題意の等積条件は

点対称の中心が x 軸上にある

こととなる。この条件は，$\alpha<\beta<0$ または $0<\beta<\alpha$ のもとでは

$$\alpha=2\beta$$

となるから，②より

$$3\beta=-2 \text{ かつ } 2\beta^2=b \ \ (b>0)$$

であり，これから β を消去しても条件が得られる。

$\boxed{26}$ $3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\overrightarrow{\mathrm{PB}}+7\overrightarrow{\mathrm{PC}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より

$$-3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+5\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)+7\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)=k\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

$$(k+5)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(7-k)\overrightarrow{\mathrm{AC}}-15\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{0}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{k+5}{15}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{7-k}{15}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が1次独立であることを考え，点Pが辺AB上にあるための条件は

$$0\leqq\frac{k+5}{15}\leqq 1 \text{ かつ } \frac{7-k}{15}=0$$

$$\therefore\ k=\underset{(\text{ア})}{\boxed{7}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\overset{(\text{イ})}{\boxed{4}}}{\underset{(\text{ウ})}{\boxed{5}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

このときの点Pを $\mathrm{P_1}$ とすると

$$\mathrm{AP_1}:\mathrm{P_1B}=\underset{(\text{エ})}{\boxed{4}}:1$$

点Pが辺AC上にあるための条件は

$$\frac{k+5}{15}=0 \text{ かつ } 0\leqq\frac{7-k}{15}\leqq 1$$

$$\therefore\ k=\underset{(\text{オカ})}{\boxed{-5}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\overset{(\text{キ})}{\boxed{4}}}{\underset{(\text{ク})}{\boxed{5}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

このときの点 P を P_2 とすると

$$AP_2 : P_2C = \underset{(\text{ケ})}{\boxed{4}} : 1$$

$\triangle AP_1P_2$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$ 倍であるから，

$$\text{四角形 } P_1BCP_2 \text{ の面積は } \triangle ABC \text{ の } 1 - \frac{16}{25} = \frac{\overset{(\text{コ})}{\boxed{9}}}{\underset{(\text{サシ})}{\boxed{25}}} \text{ 倍}$$

である。

(2) $k = 0$ のとき

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{15}\overrightarrow{AC}$$

D は AP 上の点であるから

$$\overrightarrow{AD} = t\,\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}t\,\overrightarrow{AB} + \frac{7}{15}t\,\overrightarrow{AC} \quad (t \text{ は実数})$$

と表され，D は BC 上の点でもあるから

$$\frac{1}{3}t + \frac{7}{15}t = \frac{5+7}{15}t = 1 \qquad \therefore\ t = \frac{5}{4},\ \ \overrightarrow{AP} = \frac{\overset{(\text{ス})}{\boxed{4}}}{\underset{(\text{セ})}{\boxed{5}}}\overrightarrow{AD}$$

このときの点 P を P_3 とすると

$$AP_3 : P_3D = \underset{(\text{ソ})}{\boxed{4}} : 1$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} = \frac{5\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC}}{7+5} \text{ より}$$

$$BD : DC = \underset{(\text{タ})}{\boxed{7}} : \underset{(\text{チ})}{\boxed{5}}$$

したがって，

$$\triangle ABD = \frac{\overset{(\text{ツ})}{\boxed{7}}}{\underset{(\text{テト})}{\boxed{12}}}\triangle ABC,$$

$$\triangle ABP_3 = \frac{4}{5}\triangle ABD = \frac{\overset{(\text{ナ})}{\boxed{7}}}{\underset{(\text{ニヌ})}{\boxed{15}}}\triangle ABC$$

$\boxed{27}$

(1) $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$ より，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ のとき

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OE}=|\overrightarrow{OA}|^2+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OE}$$

であるから

$$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OE}|\cos\angle AOE=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OE}|\cos\angle BOE$$

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1,\ |\overrightarrow{OE}|\neq 0$ より

$$\cos\angle AOE=\cos\angle BOE \qquad \therefore\ \angle AOE=\angle BOE$$

よって，線分 OE は $\angle AOB$ を二等分する。　　(証明おわり)

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$ であるから，(1)より

直線 OC は$\angle AOB$ を二等分する。

二等辺三角形の性質を考えると，$OA=OB$ より

直線 OC は線分 AB の垂直二等分線

であり，同時に

$$CA=CB$$

$A,\ B,\ C$ を入れ替えて議論しても同様の結果が得られるから

$$AB=BC=CA$$

よって，

三角形 ABC は正三角形　(答)

である。

(3) (2)と同様の考察をすると

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2=0$$
$$(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{BD}=\cdots=0$$
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$$

が成り立つ。ここで $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\neq\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\neq\overrightarrow{0}$ であるとすれば，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ に平行な直線に 2 つの対角線 $AC,\ BD$ がともに垂直となって $AC\,/\!/\,BD$ という矛盾が導かれるから，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0},\quad \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$$
$$\therefore\ \overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$$

よって，四角形 $ABCD$ は 2 つの対角線の長さが等しく，互いの中点で交わるから，

四角形 $ABCD$ は長方形　(答)

である。

(注)

1° 点を表す文字はローマン体で表記するのが一般的であるが，上の解答では問題文にあわせてイタリック体で表記した。

2° (3)の解答において，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\neq\overrightarrow{0}$ かつ $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\neq\overrightarrow{0}$ が否定されたのだから，

直接には $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$ または $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$ であるが，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

を前提としているので，結局 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$ かつ $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$ が成り立つ。

3° 上の(2), (3)の解答は問題の誘導に沿って証明しているが，誘導とは独立に直接証明することもできる。

(2) $\triangle ABC$ の重心を G とすると，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{0}$$

であり，O は外心でもあり重心でもあるから，

三角形 ABC は正三角形　(答)

である。

(3) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ より

$$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+2\,\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}+\left|\overrightarrow{OD}\right|^2$$

$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OD}\right|=1$ より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$$

したがって，

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-2\,\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}+\left|\overrightarrow{OD}\right|^2$$

$$\therefore\ AB=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\right|=CD$$

同様にして $AD=BC$ も示されるから，2 組の対辺の長さが等しい四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。

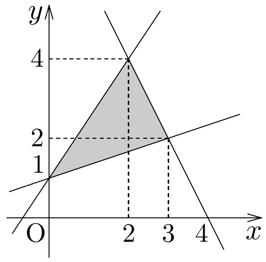
全く同様に，さらに $AC=BD$ も示されるから

四角形 $ABCD$ は長方形　(答)

である。

$\boxed{28}$

(i) 領域 K を図示すると，次図の網目部分(境界を含む)となる。



(答)

(ii) D は直線 AB 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (t\text{ は実数})$$
$$= (1-t)(1,\ 0,\ 1) + t(0,\ 1,\ 2) = (1-t,\ t,\ 1+t)$$

と表される。D は xy 平面 $(z=0)$ 上の点でもあるから，

$$z_{\mathrm{D}} = 1 + t = 0 \qquad \therefore\ t = -1$$

よって，交点 D の座標は

$$\mathrm{D}(2,\ -1,\ 0) \quad (\text{答})$$

(iii) 四面体 BCDP の体積 V_1 は

$$V_1 = \frac{1}{3}\times(\triangle\mathrm{CDP}\text{ の面積})\times z_{\mathrm{B}} = \frac{2}{3}S \quad (\text{答})$$

四面体 BCDP と四面体 ABCP は面 BCP を共有し，A は BD の中点であるから，

$$V_2 = \frac{1}{2}V_1 = \frac{1}{3}S \quad (\text{答})$$

(iv) 点 P から直線 CD におろした垂線の長さを h とすると，△CDP の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{CD}}\cdot h = \frac{3\sqrt{2}}{2}h$$

(iii)より

$$V_2 = \frac{1}{3}S = \frac{\sqrt{2}}{2}h$$

直線 CD : $x-y-3=0$ の傾きは 1 であり，領域 K の境界線と傾きを比べると，h は

$$\mathrm{P}(2,\ 4,\ 0)\text{ のとき最大値 } \frac{|2-4-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{P}(3,\ 2,\ 0)\text{ のとき最小値 } \frac{|3-2-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$$

をとるから，V_2 は

$$\begin{cases} \mathrm{P}(2,\ 4,\ 0)\text{ のとき 最大値 } \dfrac{5}{2} \\ \mathrm{P}(3,\ 2,\ 0)\text{ のとき 最小値 } 1 \end{cases} \quad (\text{答})$$

をとる。

$\boxed{29}$

(1) 内積の関係式より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \frac{1\times 2+3\times 1+2\times 1}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$$

であるから，

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\frac{7}{12} = \frac{\overset{(23)(24)}{\boxed{05}}}{\underset{(25)(26)}{\boxed{12}}}$$

面積公式より

$$\begin{aligned} S^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\sin^2\theta \\ &= \frac{1}{4}\times(1^2+3^2+2^2)\times(2^2+1^2+1^2)\times\frac{5}{12} = \frac{\overset{(27)(28)}{\boxed{35}}}{\underset{(29)(30)}{\boxed{04}}} \end{aligned}$$

（**別解**）△OAB の面積 S を

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$

と 2 通りに表し，

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4}(1^2+3^2+2^2)(2^2+1^2+1^2)\sin^2\theta \\ &= \frac{1}{4}\left\{(1^2+3^2+2^2)(2^2+1^2+1^2)-(1\times 2+3\times 1+2\times 1)^2\right\} \end{aligned}$$

を計算してもよい。

(2) $\overrightarrow{v} = (1,\ y,\ z)$ とおくと，

$$\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

より

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 1+3y+2z = 0 \text{ かつ } \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2+y+z = 0$$

$$\therefore\ \ y = 3,\ \ z = -5$$

よって，求めるベクトルの成分と内積の値は

$$\overrightarrow{v} = \Big(1,\ \underset{(31)}{\boxed{3}},\ -\underset{(32)}{\boxed{5}}\Big)$$

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1\times(-1)+3\times(-1)+(-5)\times 2 = -\underset{(33)(34)}{\boxed{14}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の $\overrightarrow{v}$ に平行な直線への正射影を $\overrightarrow{p}$ とすると

$$\overrightarrow{p} = \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{v}|^2}\overrightarrow{v}$$

であるから，平面 OAB と点 C の距離 h は

$$h = |\overrightarrow{p}| = \frac{|\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{14}{\sqrt{1^2+3^2+(-5)^2}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ \ h^2 = \frac{\boxed{\ 28\ }^{(35)(36)}}{\boxed{\ 05\ }_{(37)(38)}}$$

三角錐 OABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{35}}{2} \times \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{\boxed{\ 07\ }^{(39)(40)}}{\boxed{\ 03\ }_{(41)(42)}}$$

(**別解**) h^2 を正射影を用いないで求めると，次のようになる。

点 C から平面 OAB におろした垂線の足を H とすると，平面上にあるための条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (s,\ t \text{ は実数})$$

と表される。

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

は平面 OAB と垂直であるから

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = s\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ \ 14s + 7t = 0 \text{ かつ } 7s + 6t + 1 = 0$$

これを解いて

$$s = \frac{1}{5},\ t = -\frac{2}{5} \qquad \therefore\ \ \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 2\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

△OCH は OC を斜辺とする直角三角形であるから，三平方の定理より

$$\begin{aligned} h^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2 \\ &= (-1)^2 + (-1)^2 + 2^2 - \frac{1}{5^2}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 - 4\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 4\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\right) \\ &= 6 - \frac{1}{25}(14 - 4 \times 7 + 4 \times 6) = \frac{28}{5} \end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を変形すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\,\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 3\alpha\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + \frac{1}{4}\beta\left(4\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) + 5\gamma\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

となるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}' = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}' = 4\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}' = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}' + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}' + 5\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}'$$

と表される。

$$3\alpha + \frac{1}{4}\beta + 5\gamma \leqq 1,\quad \alpha \geqq 0,\quad \beta \geqq 0,\quad \gamma \geqq 0$$

より，点 P の全体が作る立体 E は三角錐 OA′B′C′ であるから，E の体積は V の

$$\frac{1}{3} \times 4 \times \frac{1}{5} = \frac{\overset{(43)(44)}{\boxed{\ 04\ }}}{\underset{(45)(46)}{\boxed{\ 15\ }}} \text{ 倍}$$

である。

$\boxed{30}$

(1)　$a_3 = a + 2d = 12$ より

$$a = -2d + 12$$

これを

$$S_8 = \frac{8}{2}(a + a + 7d) > 0, \quad S_9 = \frac{9}{2}(a + a + 8d) \leqq 0$$

に代入して，

$$2(-2d + 12) + 7d > 0 \text{ かつ } (-2d + 12) + 4d \leqq 0$$

$$\therefore\ -8 < d \leqq -6 \quad (\text{答})$$

(2)　一般項 a_n は

$$a_n = -2d + 12 + (n-1)d = (n-3)d + 12$$

$n > 3$ と (1)より

$$-8(n-3) < (n-3)d \leqq -6(n-3)$$

$$\therefore\ -8n + 36 < a_n \leqq -6n + 30 \quad (\text{答})$$

(3)　$n > 3$ ならば，(2)と仮定より

$$0 < a_n \leqq -6n + 30 \text{ かつ } -8(n+1) + 36 < a_{n+1} \leqq 0$$

であるから，

$$\frac{7}{2} < n < 5 \qquad \therefore\ n = 4$$

が必要である。(2)より

$$a_4 > -8 \times 4 + 36 = 4 > 0, \quad a_5 \leqq -6 \times 5 + 30 = 0$$

であり，(1)より $d < 0$ であるから

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4$$

となって十分である。よって，

$$n = 4 \quad (\text{答})$$

(4)　(1)と(3)より

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > 0 \geqq a_5 > a_6 > \cdots$$

であるから，

$$S_1 < S_2 < S_3 < S_4 \geqq S_5 > S_6 > \cdots$$

$a_5 = (-2d + 12) + 4d = 2(d + 6)$ より

$d = -6$ の場合は $a_5 = 0$，$-8 < d < -6$ の場合は $a_5 < 0$

であるから，S_n が最大となるときの n の値は

$-8 < d < -6$ のとき $n = 4$，$d = -6$ のとき $n = 4,\ 5$　(答)

であり，いずれの場合も S_n の最大値は

$$S_4 = \frac{4}{2}\{2(-2d + 12) + 3d\} = 2(24 - d) \quad (\text{答})$$

$\boxed{31}$

(1)　格子点の値の総和を直接計算して，

$$a_1 = 1 + 1 = 2 \quad (\text{答})$$
$$a_2 = (1+1) + (2+1) + (2+2) + (1+2) = 2 + 3 + 4 + 3 = 12 \quad (\text{答})$$
$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + (3+1) + (3+2) + (3+3) + (2+3) + (1+3) \\ &= 12 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 = 36 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2)　(1)の考察を一般化して

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \sum_{k=1}^{n}(n+1+k) + 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n}(k+n+1) \\ &= a_n + \frac{n}{2}(n+2+2n+1) \times 2 + 2(n+1) \\ &= a_n + (3n+2)(n+1) \\ &= a_n + 3n^2 + 5n + 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)　$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{array}{rrl} & a_2 - a_1 & = 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 2 \\ & a_3 - a_2 & = 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 2 \\ & a_4 - a_3 & = 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 2 \\ & & \vdots \\ +) & a_n - a_{n-1} & = 3(n-1)^2 + 5(n-1) + 2 \\ \hline & a_n - a_1 & = 3 \cdot \dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + 5 \cdot \dfrac{1}{2}n(n-1) + 2(n-1) \\ & & = \dfrac{1}{2}(n-1)\{n(2n-1) + 5n + 4\} \\ & & = (n-1)(n^2 + 2n + 2) \end{array}$$

最終行の式は $n = 1$ のときも成り立ち，$a_1 = 2$ より

$$a_n = (n-1)(n^2 + 2n + 2) + 2 = n^3 + n^2 \quad (\text{答})$$

$\boxed{32}$

(i) 初項 $a_1 = 7$，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$，および初項 $b_1 = 1$，公差 5 の等差数列 $\{b_n\}$ の項を書き並べると，

$$\{a_n\} : 7,\ 10,\ 13,\ \underline{16},\ 19,\ 22,\ 25,\ 28,\ \underline{31},\ 34,\ \cdots$$
$$\{b_n\} : 1,\ 6,\ 11,\ \underline{16},\ 21,\ 26,\ \underline{31},\ 36,\ 41,\ \cdots$$

となるから，2 つの数列の和集合から得られる数列 $\{c_n\}$ は

$$\{c_n\} : 1,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 13,\ \underline{16},\ 19,\ 21,\ 22,\ 25,\ 26,\ 28,\ \underline{31},\ 34,\ \cdots$$

である。よって，

$$c_7 = \underset{(29)(30)}{\boxed{16}},\quad c_{11} = \underset{(31)(32)}{\boxed{25}}$$

である。

(ii)
$$\sum_{k=1}^{7} c_k = 1 + 6 + 7 + 10 + 11 + 13 + 16 = \underset{(33)(34)}{\boxed{64}}$$
$$\sum_{k=1}^{14} c_k = \sum_{k=1}^{7} c_k + 16 \times 7 + (3 + 5 + 6 + 9 + 10 + 12 + 15) = \underset{(35)(36)(37)}{\boxed{236}}$$

$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の共通項の数列を $\{p_n\}$ とすると，初項 $p_1 = 16$，公差が 3 と 5 の最小公倍数 15 である等差数列となるから，

$$p_n = 16 + 15(n-1) = 15n + 1$$

$s_m = \sum_{k=1}^{7m} c_k$ とおくと，$s_1 = \sum_{k=1}^{7} c_k = 64$ であり，$m \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} s_m - s_{m-1} &= 7p_{m-1} + (3 + 5 + 6 + 9 + 10 + 12 + 15) \\ &= 105m - 38 \end{aligned}$$

の和をとると

$$\begin{array}{rll} & s_2 - s_1 & = 105\times 2 - 38 \\ & s_3 - s_2 & = 105\times 3 - 38 \\ & s_4 - s_3 & = 105\times 4 - 38 \\ & & \ \vdots \\ +) & s_m - s_{m-1} & = 105m - 38 \\ \hline & s_m - s_1 & = 105\left\{\dfrac{1}{2}m(m+1) - 1\right\} - 38(m-1) \\ & & = \dfrac{105}{2}m^2 + \dfrac{29}{2}m - 67 \end{array}$$

最後の式は $m = 1$ のときも成り立ち，$s_1 = 64$ より

$$s_m = \sum_{k=1}^{7m} c_k = \frac{\overset{(38)(39)(40)}{\boxed{105}}}{\underset{(41)}{\boxed{2}}}m^2 + \frac{\overset{(42)(43)}{\boxed{29}}}{\underset{(44)}{\boxed{2}}}m - \underset{(45)}{\boxed{3}}$$

（注）上の解答は設問の流れに沿って解いているが，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ から $\{c_n\}$ が定まる構造に立ち戻れば，次のように解くこともできる。

等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_{7n}\}$ の一般項はそれぞれ

$$a_n = 7 + 3(n-1) = 3n + 4$$
$$b_n = 1 + 5(n-1) = 5n - 4$$
$$c_{7n} = 16 + 15(n-1) = 15n + 1$$

であるから，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7m} c_k &= \sum_{n=1}^{5m-1} a_n + \sum_{n=1}^{3m+1} b_n - \sum_{n=1}^{m} c_{7n} \\ &= \frac{5m-1}{2}(7 + 15m + 1) + \frac{3m+1}{2}(1 + 15m + 1) \\ &\qquad - \frac{m}{2}(16 + 15m + 1) \\ &= \frac{\overset{(38)(39)(40)}{\boxed{105}}}{\underset{(41)}{\boxed{2}}} m^2 + \frac{\overset{(42)(43)}{\boxed{29}}}{\underset{(44)}{\boxed{2}}} m - \underset{(45)}{\boxed{3}}\end{aligned}$$

(iii) 数列

$$\{c_n\} : 1,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 13,\ \underline{16},\ 19,\ 21,\ 22,\ 25,\ 26,\ 28,\ \underline{31},$$
$$34,\ 36,\ 37,\ 40,\ 41,\ 43,\ \underline{46},\ 49,\ \cdots$$

（アンダーラインは $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の共通項）

に対して，数列 $\{c_{2k} - c_{2k-1}\}$ は

$$6-1,\ 10-7,\ 13-11,\ 3,\ 1,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ \cdots$$

であり，以降は 3, 1, 1, 3, 2, 3, 2 を繰り返す。

$$77 = 3 + 7 \times 10 + 4$$

より

$$\begin{aligned}d_{77} &= \sum_{k=1}^{77} (c_{2k} - c_{2k-1}) \\ &= 5 + 3 + 2 + (3 + 1 + 1 + 3 + 2 + 3 + 2) \times 10 + 3 + 1 + 1 + 3 \\ &= \boxed{168}_{\ (46)(47)(48)}\end{aligned}$$

である。また，

$$80 = 3 + 7 \times 11$$

より

$$\begin{aligned}d_{80} &= \sum_{k=1}^{80} (c_{2k} - c_{2k-1}) \\ &= 5 + 3 + 2 + (3 + 1 + 1 + 3 + 2 + 3 + 2) \times 11 \\ &= \boxed{175}_{\ (49)(50)(51)}\end{aligned}$$

である。

$\boxed{33}$ (I), (II), (III)より，$a_n > b_n$ のとき

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{10}(a_n - b_n) + 1 = \frac{9}{10}a_n + \frac{1}{10}b_n + 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{10}(a_n - b_n) - 1 = \frac{1}{10}a_n + \frac{9}{10}b_n - 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

① − ② より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{4}{5}(a_n - b_n) + 2 > 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

$a_0 = 10$，$b_0 = 5$ より $a_0 > b_0$ であるから，数学的帰納法により，すべての非負整数 n に対して $a_n > b_n$ および ③が成り立つ。

$\alpha = \frac{4}{5}\alpha + 2$ とおくと，

$$\frac{1}{5}\alpha = 2 \qquad \therefore\ \alpha = 10$$

$$\therefore\ 10 = \frac{4}{5} \times 10 + 2 \qquad \cdots\cdots ④$$

③ − ④ より

$$a_{n+1} - b_{n+1} - 10 = \frac{4}{5}(a_n - b_n - 10)$$

$\{a_n - b_n - 10\}$ は初項 $a_0 - b_0 - 10 = 10 - 5 - 10 = -5$，公比 $\frac{4}{5}$ の等比数列であるから

$$a_n - b_n - 10 = -5\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\therefore\ a_n - b_n = 10 - 5\left(\frac{4}{5}\right)^n \qquad \cdots\cdots ⑤$$

(I), (II), (III)より，つねに

$$a_n + b_n = 15 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つことに注意すると，⑤かつ⑥ より

$$a_n = \frac{25}{2} - \frac{5}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n \quad \text{(答)}$$

$\boxed{34}$ すべての自然数 n に対して，

$$(ax+by)^n \leqq ax^n + by^n \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成立することを，n についての数学的帰納法で示す。

$n=1$ のとき

$$(\text{左辺}) = (ax+by)^1 = ax+by$$
$$(\text{右辺}) = ax^1 + by^1 = ax+by$$

であるから，$(*)$が成り立つ。このとき，$(*)$の等号は$(a+b=1$ を満たす$)$任意の正数 a, b, x, y について成り立つ。

$n=k$ のとき $(*)$が成り立つとすると，両辺に $ax+by\,(>0)$ をかけて

$$(ax+by)^{k+1} \leqq (ax+by)(ax^k+by^k) \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで，問題の仮定 $a>0$, $b>0$, $a+b=1$ を用いると

$$\begin{aligned}
&ax^{k+1}+by^{k+1}-(ax+by)(ax^k+by^k)\\
&= a(1-a)x^{k+1} - ab(xy^k+x^ky) + b(1-b)y^{k+1}\\
&= abx^{k+1} - ab(x^ky+xy^k) + aby^{k+1}\\
&= ab(x^{k+1}-x^ky-xy^k+y^{k+1})\\
&= ab\{x^k(x-y)-y^k(x-y)\}\\
&= ab(x-y)(x^k-y^k) \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ②
\end{aligned}$$

がいえるから，①かつ②より

$$(ax+by)^{k+1} \leqq ax^{k+1}+by^{k+1} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ。等号成立条件については，

「③で等号成立」$\Longleftrightarrow$「①と②で同時に等号成立」
$\Longleftrightarrow$「①で等号成立」かつ $x=y$
$\Longleftrightarrow$ $x=y$

である。

以上より，すべての自然数 n に対して $(*)$が成り立ち，不等式の等号成立条件は a, b, x, y が正の数，$a+b=1$ のもとで

$$n=1 \text{ のとき任意，} n \geqq 2 \text{ のとき } x=y$$

である。　　　　（証明終わり）

（別解） $a>0$ より

$$\left(x+\frac{by}{a}\right)^n \leqq \frac{1}{a^{n-1}}x^n + \frac{b}{a^n}y^n$$

を証明すればよいことを考えて，

$$f(x) = \frac{1}{a^{n-1}}x^n + \frac{b}{a^n}y^n - \left(x+\frac{by}{a}\right)^n$$

とおくと，

$$f'(x) = \frac{n}{a^{n-1}}x^{n-1} - n\left(x+\frac{by}{a}\right)^{n-1} = n\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} - \left(x+\frac{by}{a}\right)^{n-1}\right\}$$

$n=1$ のときは (恒等的に) $f'(x)=0$ であるから $f(x)$ は定数となるが，実際

$$f(x)=x+\frac{b}{a}y-\left(x+\frac{by}{a}\right)=0$$

である。

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x)>0 \iff & \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}>\left(x+\frac{by}{a}\right)^{n-1} \\ \iff & \frac{x}{a}>x+\frac{by}{a} \\ \iff & (1-a)x>by \\ \iff & x>y \qquad (\because\ b=1-a>0) \end{aligned}$$

であるから，$f(x)$ の増減は

x	(0)		y	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

となる。よって，

$$\begin{aligned} f(x) \geqq f(y) &= \frac{1}{a^{n-1}}y^n+\frac{b}{a^n}y^n-\left(y+\frac{by}{a}\right)^n \\ &= \frac{a+b-(a+b)^n}{a^n}y^n=\frac{1-1^n}{a^n}y^n=0 \end{aligned}$$

両辺に $a^n\ (>0)$ をかけると

$$ax^n+by^n \geqq (ax+by)^n$$

が成り立ち，不等式の等号成立条件は a，b，x，y が正の数，$a+b=1$ のもとで

$n=1$ のとき任意，$n \geqq 2$ のとき $x=y$

である。　　　　(証明終わり)

(注)

1° 等号成立条件は，「すべての自然数 n に対しても成り立つ」と解釈して $x=y$ (だけ) とも考えられるが，ここでは各 n について命題を考えているものとして解答した。

2° 「別解」は数学 II の範囲で解答したが，それにこだわらないなら

$$f(x)=ax^n+by^n-(ax+by)^n$$

とおいて，

$$f'(x)=anx^{n-1}-na(ax+by)^{n-1}$$

と処理してもよい。

3° 数学 III の範囲になるが，凹凸を利用する証明もある。

$n \geqq 2$ のとき，$x>0$ において $(x^n)''=n(n-1)x^{n-2}>0$ より $y=x^n$ はつねに下に凸であるから，$x \neq y$ のとき

$$\left(\frac{ax+by}{a+b}\right)^n<\frac{ax^n+by^n}{a+b}$$