

方程式 $3x^2 + 3x + 1 = y^2$ の整数解について

大塚美紀生

定理 1 方程式 $3x^2 + 3x + 1 = y^2$ の整数解は無数に存在する。^{注1}

この定理はかなり専門的に見えるが、実は高校数学(大学入試数学)の技巧だけを用いて証明できる。本稿では、数学的発想にも触れながら、この定理を証明する。間接的に、文献 [1] の解説にもなっている。

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3x + 1 = y^2 \text{ を変形すると} \\ 12x^2 + 12x + 4 = 4y^2 \\ 3(2x + 1)^2 + 1 = (2y)^2 \end{aligned}$$

ここで、

$$X = 2x + 1, \quad Y = 2y \tag{1}$$

とおくと、

$$Y^2 - 3X^2 = 1 \tag{2}$$

に帰着される。

$$Y^2 - 3X^2 = (Y + \sqrt{3}X)(Y - \sqrt{3}X) \text{ に注目して}^{\text{注2}}$$

$$y_n + \sqrt{3}x_n = (2 + \sqrt{3})^n$$

により正の整数 x_n, y_n を定めると、

$$y_1 = 2, \quad x_1 = 1 \tag{3}$$

であり、

$$\begin{aligned} y_{n+1} + \sqrt{3}x_{n+1} &= (2 + \sqrt{3})(y_n + \sqrt{3}x_n) \\ &= 2y_n + 3x_n + \sqrt{3}(y_n + 2x_n) \end{aligned}$$

$x_{n+1}, y_{n+1}, x_n, y_n$ は整数、 $\sqrt{3}$ は無理数であるから

$$\begin{cases} y_{n+1} = 2y_n + 3x_n \\ x_{n+1} = y_n + 2x_n \end{cases} \tag{4}$$

補題 方程式(2)の正の整数解 (Y, X) は、(3)、(4)で定まる (y_n, x_n) で尽くされる。

(証明) まず、 (y_n, x_n) が(2)の正の整数解であることを、 n についての数学的帰納法で示す。^{注3} $n = 1$ のときは、(3)より成り立つ。

(y_n, x_n) が(2)の正の整数解であるとすれば、整数は加減乗法について閉じているから、(4)より y_{n+1}, x_{n+1} も整数であり、

$$\begin{aligned} y_{n+1}^2 - 3x_{n+1}^2 &= (2y_n + 3x_n)^2 - 3(y_n + 2x_n)^2 \\ &= y_n^2 - 3x_n^2 \end{aligned}$$

であるから、 (y_{n+1}, x_{n+1}) も(2)の(整数)解である。また、(4)より

$$y_{n+1} = 2y_n + 3x_n > y_n > 0$$

$$x_{n+1} = y_n + 2x_n > x_n > 0$$

であるから、 (y_{n+1}, x_{n+1}) も(2)の正の(整数)解である。

次に，

$$(4) \iff \begin{cases} y_n = 2y_{n+1} - 3x_{n+1} \\ x_n = -y_{n+1} + 2x_{n+1} \end{cases}$$

と変形できるから，(2)の正の整数解 (Y, X) に対して $(2Y - 3X, -Y + 2X)$ も(2)の整数解であり，

$$\begin{aligned} 2Y - 3X &= \frac{4Y^2 - 9X^2}{2Y + 3X} = \frac{4(3X^2 + 1) - 9X^2}{2Y + 3X} = \frac{3X^2 + 4}{2Y + 3X} > 0 \\ 2X - Y &= \frac{4X^2 - Y^2}{2X + Y} = \frac{4X^2 - (3X^2 + 1)}{2X + Y} = \frac{(X + 1)(X - 1)}{2X - Y} \geq 0 \\ X - (-Y + 2X) &= \frac{Y^2 - X^2}{Y + X} = \frac{(3X^2 + 1) - X^2}{Y + X} = \frac{2X^2 + 1}{Y + X} > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

が成り立つ。

(5)より， $X > 1$ である限り^{注4}この操作を繰り返すことができ，

$$Y = b_1 > b_2 > b_3 > \dots > 0$$

$$X = a_1 > a_2 > a_3 > \dots > 0$$

を満たす方程式(2)の正の整数解の列 (b_n, a_n) が得られる。ところが， X 以下の正の整数は有限個しかないからこの操作が有限で終わり，ある自然数 N に対して

$$a_N = 1 = x_1$$

となる。このとき

$$b_N = 2 = y_1$$

であり，

$$Y = b_1 = y_N, \quad X = a_1 = x_N$$

が成り立つ。

(証明おわり)

(定理の証明)

(4)より

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= 2y_{n+1} + 3x_{n+1} \\ &= 2(2y_n + 3x_n) + 3(y_n + 2x_n) \\ &= 7y_n + 12x_n \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= y_{n+1} + 2x_{n+1} \\ &= (2y_n + 3x_n) + 2(y_n + 2x_n) \\ &= 4y_n + 7x_n \end{aligned} \quad (7)$$

であるから，

$$y_{n+2} \equiv y_n \pmod{2}, \quad x_{n+2} \equiv x_n \pmod{2}$$

であり，(3)より

$$y_{2n-1} \text{ は偶数, } x_{2n-1} \text{ は奇数}$$

である。

補題より (y_{2n-1}, x_{2n-1}) は (1) を満たす (2) の解であり, (6), (7) より

$$y_{n+2} = 7y_n + 12x_n > x_n, \quad x_{n+2} = 4y_n + 7x_n > y_n$$

であるから, (1), (2) を満たす正の整数の組 (Y, X) は無数にあり, 方程式

$$3x^2 + 3x + 1 = y^2$$

の整数解は無数にある。

(証明おわり)

定理 1 の結果をさらに発展させて,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3x + 1 &= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - x^3 \\ &= (x+1)^3 + (-x)^3 \end{aligned}$$

と変形できることに注目すると, ただちに次の定理が得られる。

定理 2 方程式 $x^3 + y^3 = z^2$ の整数解は無数にある。

注 1 証明の流れからすると, 定理 1 よりむしろ補題の方が主定理にふさわしく感じられるかも知れないが, もともとは定理 2 の無限性に関心があったので, 文献[1]の流儀をまねて, 方程式 $3x^2 + 3x + 1 = y^2$ を中心としてまとめることにした。

注 2 ここでは, 高校数学の範囲の議論として, 整数 x_n, y_n を発見考察的に

$$y_n + \sqrt{3}x_n = (2 + \sqrt{3})^n$$

として定めている。代数的整数論の見地から述べると, Dirichlet(ディリクレ)の単数定理を根拠として, 2次体 $Q(\sqrt{3})$ の正の単数群が無限巡回群であることに着目していることになる。

別の導入方法として, 行列で表現する方法も考えられる。 $X = 0, 1, 2, 3, \dots$ と順に代入して行って, 方程式(2)の整数解をさがすと

$$(Y, X) = (1, 0), (2, 1), (7, 4), \dots$$

が見つかるから, 2次正方行列 A を

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots (*)$$

により定めると, 高校数学の典型的な解法により

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

と求まり, 連立漸化式(4)が得られる。ちなみに, (6), (7)の表現行列は A^2 である。

注3 (可換)体論の心得があれば,

$$y_n + \sqrt{3}x_n = (2 + \sqrt{3})^n \quad (y_n, x_n \text{ は整数}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

より

$$y_n - \sqrt{3}x_n = (2 - \sqrt{3})^n \quad (y_n, x_n \text{ は整数}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

が導かれることがわかるから, ①と②を辺々掛け合わせて

$$y_n^2 - 3x_n^2 = 1$$

すなわち, (y_n, x_n) が方程式(2)の整数解であることがすぐに示される。

高校流に①から②を導くならば, 次のようになる。 $(2+x)^n$ の偶数次の項だけ集めたものを $f(x)$, 奇数次だけ集めたものを $g(x)$ とすると,

$$(2+x)^n = f(x) + g(x)$$

であり, $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$ より

$$(2-x)^2 = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$$

となる。 $f(x)$, $g(x)$ はともに整数係数で $(\sqrt{3})^2 = 3$ あるから

$$f(\sqrt{3}), \frac{g(\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \text{ は整数}$$

であり,

$$f(\sqrt{3}) = y_n, \quad g(\sqrt{3}) = x_n\sqrt{3}$$

が成り立つ。

注4 $(Y, X) \mapsto (2Y - 3X, -Y + 2X)$ により単調減少列が得られるというだけでは, $a_N = 1$ を満たす自然数 N が存在するとは言えない。実際, (6), (7)を逆算した変換からも解の単調減少列が得られるが, (7, 4)の次は(1, 0)であり, (2, 1)は飛ばされてしまう。

ここでは, (5)により

$$X > 1 \iff -Y + 2X > 0$$

の同値関係があり, $X > 1$ である限り作業が継続可能であることが, 作業終了時には $X = 1$ となることを意味する。

参考文献

- [1] A.Schinzel and W.Sierpiński, *Sur l'équation $x^2 + x + 1 = 3y^2$* ,
Colloq. Math. 4(1957), 71-73
- [2] L.E.Dickson, *History of the theory of numbers*, Chelsea(1966)