$\boxed{1}$ $A\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$, $B\left(b,\ \dfrac{1}{2}b^2\right)$ $(a \neq b)$ とおくと，A における放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の接線の方程式は

$$y=a(x-a)+\frac{1}{2}a^2 \qquad \therefore\ \ y=ax-\frac{a^2}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

B における放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の接線の方程式は

$$y=bx-\frac{b^2}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

①かつ② を x, y についての連立方程式として解くことにより

$$P\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{ab}{2}\right)$$

線分 PA, PB および放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ で囲まれる図形の面積 S は，$a<b$ のとき

$$S=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(ax-\frac{a^2}{2}\right)\right\}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(bx-\frac{b^2}{2}\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^{\frac{a+b}{2}}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-b)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}=\frac{1}{24}(b-a)^3$$

$a>b$ のときも同様にして $S=\dfrac{1}{24}(a-b)^3$ となるから，あわせると

$$S=\frac{1}{24}|a-b|^3 \quad (a\neq b)$$

PA, PB が直交するとき

$$ab=-1 \quad (a\neq b)$$

であるから，

$$S=\frac{1}{24}\left|a+\frac{1}{a}\right|^3=\frac{1}{24}\left(|a|+\frac{1}{|a|}\right)^3 \quad \cdots\cdots ③$$

ここで，相加・相乗平均の不等式より

$$|a|+\frac{1}{|a|}\geqq 2\sqrt{|a|\cdot\frac{1}{|a|}}=2 \quad \cdots\cdots ④$$

であり，不等式の等号は

$$|a|=\frac{1}{|a|}\ \ \text{すなわち}\ \ a=\pm 1$$

のとき成り立つから，③, ④より

$$S\text{ の最小値は }\frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

$\boxed{2}$ 直線 L の方程式を

$$bx + c(y-1) = 0 \quad \big((b,\ c) \neq (0,0)\big)$$

とおくと，L 上の任意の点 $Q(-ct,\ bt+1)$ (t は実数) に対して点

$$\big(a(-ct) + (a-2)(bt+1),\ (a-2)(-ct) + a(bt+1)\big)$$

も L 上の点であるから，

$$b\big\{a(-ct) + (a-2)(bt+1)\big\} + c\big\{(a-2)(-ct) + a(bt+1) - 1\big\} = 0$$
$$\big\{-abc + (a-2)b^2 - (a-2)c^2 + abc\big\}t + (a-2)b + (a-1)c = 0$$
$$\therefore\ (a-2)(b+c)(b-c)t + a(b+c) - 2b - c = 0$$

この式が任意の実数 t に対して成り立つから

$$\begin{cases} (a-2)(b+c)(b-c) = 0 & \cdots\cdots ① \\ a(b+c) - 2b - c = 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

題意は，

①かつ②かつ $(b,\ c) \neq (0,\ 0)$

を満たす実数 $b,\ c$ が存在するような実数 a を求めることである。

①より

$$a = 2\ \text{ または }\ b + c = 0\ \text{ または }\ b - c = 0$$

(i) $a = 2$ のとき，②より

$$2(b+c) - 2b - c = c = 0$$

さえ満たせばよいから，条件を満たす実数 $b,\ c$ は存在する。

(ii) $b + c = 0$ のとき，②より

$$-2b - c = 0$$

であるが，$b + c = 0$ かつ $-2b - c = 0$ を満たす実数 $b,\ c$ は $b = c = 0$ に限られるから，条件を満たす実数 $b,\ c$ は存在しない。

(iii) $b - c = 0$ のとき，②より

$$b(2a-3) = 0$$

$b = c,\ (b,\ c) \neq (0,\ 0)$ より $b \neq 0$ であるから，

$$a = \frac{3}{2}$$

であれば条件を満たす実数 $b,\ c$ は存在する。

以上より，求める実数 a は

$$a = 2,\ \frac{3}{2} \quad \text{(答)}$$

$\boxed{3}$ $$0 < m \leqq 2N,\quad 0 < n \leqq 2N \qquad \cdots\cdots ①$$

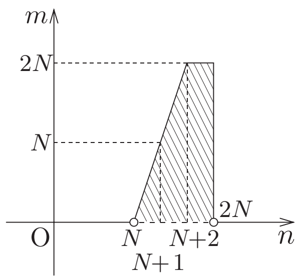
n を固定し，

$$m = -x^2 + nx = -\left(x - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4}$$

を x の 2 次関数とみなして，$x \geqq N$ における値域を求めることにより，方程式が N 以上の実数解をもつ条件を求めると，①より $\dfrac{n}{2} \leqq N$ であるから

$$m \leqq -N^2 + nN \qquad \cdots\cdots ②$$

①かつ②を nm 平面上に図示すると，次図の斜線部分(n 軸上の点は含まず，それ以外の境界線上の点は含む)となる。



この領域内の格子点を数えることにより，求める組 $(m,\ n)$ の個数は

$$N + 2N\{2N - (N+1)\} = 2N^2 - N \quad \text{(答)}$$

(注)　方程式 $x^2 - nx + m = 0$ が N 以上の実数解をもつ条件は，

$$f(x) = x^2 - nx + m = \left(x - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4} + m$$

とおいて，$y = f(x)$ のグラフと x 軸が $x \geqq N$ の範囲で共有点をもつ条件から求めてもよい。

(i)　$f(N) \leqq 0$ のとき

$x \geqq N$ で $y = f(x)$ のグラフは x 軸と共有点をもつから条件を満たし，

$$f(N) = N^2 - nN + m \leqq 0$$

(ii)　$f(N) > 0$ のとき

($y = f(x)$ のグラフと x 軸が共有点をもち，)共有点がすべて $x \geqq N$ の範囲にあることが条件となり，

$$\begin{cases} -\dfrac{n^2}{4} + m \leqq 0 \\ f(N) = N^2 - nN + m > 0 \\ \dfrac{n}{2} > N \end{cases}$$

(i)または(ii)と①の共通部分が $m,\ n$ についての条件であり，①かつ②と同値である。

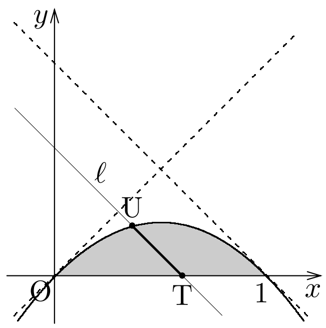
$\boxed{4}$ O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 1)$ とし，P$\left(\dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3}\right)$を通り ℓ(直線 OA)と垂直な平面を $\alpha(t)$ とおく。

(1) 平面 $\alpha(t)$ と xy 平面の交線上の任意の点を Q$(x,\ y,\ 0)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 1\cdot\left(x-\frac{t}{3}\right)+1\cdot\left(y-\frac{t}{3}\right)+1\cdot\left(0-\frac{t}{3}\right)=0$$

$$\therefore\ \ x+y=t,\ z=0 \quad (答)$$

(2) xy 平面上において，直線 $x+y=t$ と x 軸および放物線 $y=x(1-x)$ との交点をそれぞれ T$(t,\ 0,\ 0)$，U とおく。



$$\begin{cases} x+y=t \\ y=x(1-x) \end{cases}$$

より y を消去すると

$$-x+t=x(1-x)$$
$$x^2-2x+t=0$$

$0\leqq t\leqq 1$ のもとで $0\leqq x\leqq 1$ より

$$x=1-\sqrt{1-t}$$

$y=-x+t$ より y も求めて

$$\mathrm{U}\left(1-\sqrt{1-t},\ t-1+\sqrt{1-t},\ 0\right)$$

平面 $\alpha(t)$ による回転体の断面は，線分 PT が回転してできた円板から線分 PU が回転してできた円板を除いた図形であり，断面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned}
S(t) &= \pi\,\overline{\mathrm{PT}}^2-\pi\,\overline{\mathrm{PU}}^2 \\
&= \pi\left\{\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2\right\} \\
&\quad -\pi\left\{\left(1-\frac{t}{3}-\sqrt{1-t}\right)^2+\left(\frac{2}{3}t-1+\sqrt{1-t}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2\right\} \\
&= \pi\left\{2\cdot\frac{t}{3}\left(1-\sqrt{1-t}\right)-\left(1-\sqrt{1-t}\right)^2\right. \\
&\qquad \left.+2\cdot\frac{2}{3}t\left(1-\sqrt{1-t}\right)-\left(1-\sqrt{1-t}\right)^2\right\} \\
&= 2\pi\left\{t\left(1-\sqrt{1-t}\right)-\left(1-\sqrt{1-t}\right)^2\right\} \\
&= 2\pi\left(t-1+\sqrt{1-t}\right)\left(1-\sqrt{1-t}\right) \\
&= 2\pi\left\{2t-2+(1-t)^{\frac{3}{2}}+(1-t)^{\frac{1}{2}}\right\}
\end{aligned}$$

$u=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{t}{3}=\dfrac{t}{\sqrt{3}}$ とおくと

$$0\leqq t\leqq 1 \iff 0\leqq u\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$$

であり，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} S(t)\,du \\
&= \int_0^1 S(t)\frac{du}{dt}\,dt \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1 \left\{2t-2+(1-t)^{\frac{3}{2}}+(1-t)^{\frac{1}{2}}\right\}dt \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[t^2-2t-\frac{2}{5}(1-t)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(1-2+\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{-15+6+10}{15} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{45}\pi \quad (答)
\end{aligned}$$