$\boxed{1}$ $P(X,\ Y,\ 0)$ とおく。$C(a,\ 0,\ 3)$ を端点とする半直線 CP が球と共有点をもつことが条件であるが，球は $0 \leqq z \leqq 2$ の範囲にあり，点 $C(z=3)$ と点 $P(z=0)$ は球に関して反対側にあるから，単に

直線 CP が球 $x^2+y^2+(z-1)^2 \leqq 1$ と共有点をもつ

条件を考えれば十分である。

直線 CP 上の点 $Q(x,\ y,\ z)$ は

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= (1-t)(a,\ 0,\ 3)+t(X,\ Y,\ 0)\\ &= \big(a+(X-a)t,\ Yt,\ 3-3t\big) \quad (t\text{ は実数})\end{aligned}$$

と表される。点 Q が球 $x^2+y^2+(z-1)^2 \leqq 1$ にあるとき

$$\big\{a+(X-a)t\big\}^2+(Yt)^2+(2-3t)^2 \leqq 1$$

$$\therefore\ \ \big\{(X-a)^2+Y^2+9\big\}t^2+2\big\{a(X-a)-6\big\}t+a^2+3 \leqq 0$$

点 $(X,\ Y,\ 0)$ が S に含まれる条件は，この不等式を満たす実数 t が存在することであるから，

$$(X-a)^2+Y^2+9>0$$

に注意すると，その条件は

$$\begin{aligned}&\big\{a(X-a)-6\big\}^2-\big\{(X-a)^2+Y^2+9\big\}(a^2+3) \geqq 0\\ &-12a(X-a)+36-3(X-a)^2-(a^2+3)(Y^2+9) \geqq 0\\ &3(X-a)^2+12a(X-a)+(a^2+3)(Y^2+9)-36 \leqq 0\\ &3(X-a+2a)^2+(a^2+3)Y^2 \leqq 3a^2+9\end{aligned}$$

$$\therefore\ \ \frac{(X+a)^2}{a^2+3}+\frac{Y^2}{3} \leqq 1 \quad (\text{答})$$

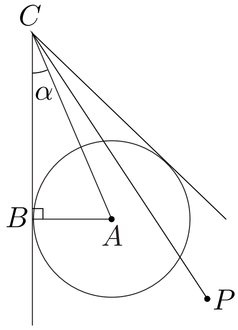
(別解) $A(0,\ 0,\ 1)$ とし，点 C から球に引いた接線の接点を B とすると

$$AB=1,\ \ \angle ABC=90^\circ$$

であるから，$\angle ACB=\alpha\left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\sin\alpha=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{\sqrt{a^2+4}},$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{a^2+3}}{\sqrt{a^2+4}}$$



であり，点 $P(X,\ Y,\ 0)$ が影 S に含まれるための条件は

$$\angle ACP \leqq \alpha$$

である。$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $\cos\alpha$ は単調減少であるから

$$\cos\angle ACP \geqq \cos\alpha$$

内積の定義式より

$$\cos\angle ACP=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CP}|}=\frac{-a(X-a)+0\cdot Y-2\cdot(-3)}{\sqrt{a^2+4}\sqrt{(x-a)^2+Y^2+9}}$$

であるから，条件式は

$$\frac{-a(X-a)+6}{\sqrt{(X-a)^2+Y^2+9}} \geqq \sqrt{a^2+3}$$

$-a(X-a)+6 \geqq 0$ のもとで

$$\{-a(X-a)+6\}^2 \geqq (a^2+3)\{(X-a)^2+Y^2+9\}$$
$$3(X-a)^2+12a(X-a)+(a^2+3)Y^2+9a^2-9 \leqq 0$$
$$3\{(X-a)+2a\}^2+(a^2+3)Y^2 \leqq 3a^2+9$$
$$\therefore \quad \frac{(X+a)^2}{a^2+3}+\frac{Y^2}{3} \leqq 1 \quad \text{(答)}$$

$\boxed{2}$ $A\left(a,\ -\dfrac{1}{a}\right)$，$B\left(b,\ -\dfrac{1}{b}\right)$とおくと，$A$ における $y=-\dfrac{1}{x}$ の接線の方程式は

$$y=\frac{1}{a^2}(x-a)-\frac{1}{a} \qquad \therefore\ y=\frac{1}{a^2}x-\frac{2}{a}$$

B における $y=-\dfrac{1}{x}$ の接線の方程式は

$$y=\frac{1}{b^2}x-\frac{2}{b}$$

2 接線が点 $P(p,\ q)$ で交わるから

$$\begin{cases} q=\dfrac{1}{a^2}p-\dfrac{2}{a} & \cdots\cdots ① \\ q=\dfrac{1}{b^2}p-\dfrac{2}{b} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①かつ②より q を消去すると

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)p-\left(\frac{2}{a}-\frac{2}{b}\right)=0$$

$a\neq b$ より $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\neq 0$であるから

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)p-2=0$$

$$\frac{a+b}{ab}p=2 \qquad \therefore\ p=\frac{2ab}{a+b} \qquad \cdots\cdots ③$$

$q=\dfrac{1}{a^2}p-\dfrac{2}{a}$ より

$$q=\frac{2b}{a(a+b)}-\frac{2}{a}=\frac{2(b-a-b)}{a(a+b)}=\frac{-2}{a+b} \quad \cdots\cdots ④$$

③，④より

$$a+b=-\frac{2}{q},\quad ab=\frac{a+b}{2}p=-\frac{p}{q}$$

となる。

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\left(a-p,\ -\frac{1}{a}-q\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(b-p,\ -\frac{1}{b}-q\right)$$

に面積公式を適用することにより，$\triangle PAB$ の面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t)&=\frac{1}{2}\left|(a-p)\left(-\frac{1}{b}-q\right)-(b-p)\left(-\frac{1}{a}-q\right)\right| \\ &=\frac{1}{2}\left|p\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)-q(a-b)-\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right| \\ &=\frac{1}{2}|a-b|\left|\frac{p}{ab}-q-\frac{a+b}{ab}\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2-4ab}\left|\frac{p}{ab}-q-\frac{a+b}{ab}\right| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{q^2}+\frac{4p}{q}}\left|-q-q-\frac{2}{p}\right| \\
&= \frac{1}{q}\sqrt{1+pq}\cdot\frac{2pq+2}{p} \\
&= \frac{2}{t}(1+t)^{\frac{3}{2}} \quad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

t の関数とみて微分すると,

$$
\begin{aligned}
S'(t) &= -\frac{2}{t^2}(1+t)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{t}\cdot\frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{t^2}(1+t)^{\frac{1}{2}}\{-2(1+t)+3t\} \\
&= \frac{1}{t^2}(1+t)^{\frac{1}{2}}(t-2)
\end{aligned}
$$

は ($t>0$ において) $t-2$ と同符号であるから, $S(t)$ の増減は

(t)	0		2		$(+\infty)$
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		↘	極小	↗	

となり, 面積 $S(t)$ の最小値は

$$S(2)=3\sqrt{3} \quad \text{(答)}$$