

□1 (微分方程式の導出)

任意定数 A, B, C を消去して, 微分方程式を導け。

- (1) $y = x^2 + Ax + B$
- (2) $y = Cx$
- (3) $y = Ce^{2x}$
- (4) $y = A \cos 3x + B \sin 3x$

□2 (変数分離形)

- (1) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = x(2y - 1)$ の一般解を求めよ。
- (2) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = y(1 - y)$ の解で初期条件「 $x = 0$ のとき $y = 2$ 」を満たすものを求めよ。

3 (定数変化法)

- (1) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ を, 変数分離による解法と積の微分の公式を用いる解法の 2 通りで解け。
- (2) (1) で求めた一般解の任意定数 C を x の関数 $z = C(x)$ に変えた関数をあらためて y とおくことにより, 微分方程式 $\frac{dy}{dx} - 3y = x$ を解け。
- (3) $(x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) = x \sin x$, $f(0) = 1$ を満たす微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ。

4 (導関数と微分方程式)

関数 $f(x)$ は次の等式

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$$

を満たしているとする。関数 $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であるとき, 次の問に答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ はすべての x の値で微分可能であることを証明せよ。
- (2) 関数 $f(x)$ を求めよ。

5 (積分方程式)

$\int_1^x 3tf(t) dt = (x^2 - x - 2)f(x) - 4$ を満たす微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ。

6 (変数変換)

(1) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$ を解け。

(2) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2y^2}{2xy}$ ($x > 0, y > 0$) を解け。

(3) $f(x) = x + \int_0^x f(x - t) dt$ を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

7 (2階微分方程式)

$f''(x) - 3f'(x) - 4f(x) = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 9$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

8 (単振動の微分方程式)

k を 0 でない実数定数とするとき, 2 回微分可能な関数 $f(t)$ は

$$f''(t) = -k^2 f(t)$$

を満たすとする。

- (1) $F(t) = f'(t) \cos kt + kf(t) \sin kt$ とおくとき, $F'(t)$ を求めよ。
- (2) $G(t) = -f'(t) \sin kt + kf(t) \cos kt$ を求めよ。
- (3) $f(t)$ を求めよ。

9 (曲線の微分方程式)

原点を O とする。

- (1) 点 P における接線と線分 OP がつねに垂直であるような点 P の軌跡の方程式を求めよ。ただし、点 P の軌跡は原点を通らないものとする。
- (2) 滑らかな曲線 $y = f(x)$ 上の任意の点 P における接線は、 x 軸、 y 軸とそれぞれ点 Q 、 R と交わる。点 P がつねに QR の中点であるとき、 $f(x)$ を求めよ。
- (3) 直線 $y = mx - m^2$ は、 m によらずつねに曲線 $y = g(x)$ に接する。このとき、 m を消去して $g(x)$ についての微分方程式を導き、 $g(x)$ を求めよ。ただし、つねに $g''(x) \neq 0$ であるとする。

10 (水の問題)

xy 平面上の曲線 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) を y 軸のまわりに回転させてできた形の容器があり、 y 軸の正の方向を鉛直上方にして水を入れてある。水が底(原点)から流出し始めてから時間が t だけ経過したときの水の深さを $h(t)$ とすれば、そのときの水の流出の速さは $\sqrt{h(t)}$ であるという。 $h(0) = 1$ とし、水が全部流出し終わる時刻まで考えるものとする。

- (1) $h(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。
- (2) $h(t)$ を t を用いて表せ。

1 確認：変数 x についての未知関数 $y(x)$ とその導関数 $y' (= \frac{dy}{dx})$, $y'' (= \frac{d^2y}{dx^2})$, \dots , $y^{(n)} (= \frac{d^ny}{dx^n})$ の間の関係式 $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ を y に関する微分方程式といい、微分方程式を満たす関数 $y = f(x)$ を微分方程式の解という。(3)の $y = Ce^{2x}$

は $y' = 2y$ を満たすから微分方程式 $y' = 2y$ の解であるが、 C が任意の値をとることにより微分方程式 $y' = 2y$ のすべての解を一般に表している。このように、任意定数を用いて微分方程式の解全体を表したものを一般解といい、一般解の任意定数に特定の値を与えることで得られる個々の解を特殊解という。問題に与えられた条件から特殊解が限定されるとき、その条件を初期条件と呼ぶことがあるが、もともとはある前提条件のもとで微分方程式の特殊解を求めることが研究されていたからである。

一般解を微分して任意定数を消去することにより、微分方程式を導くことから始めよう。微分方程式そのものを実感してもらおうことがねらいである。

微分積分の計算の基礎は、「微分法」および「積分法」のファイルで確認してほしい。

解答：

(1) 任意定数が消去されるまで微分して

$$\frac{dy}{dx} = 2x + A \quad \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \quad (\text{答})$$

(2) $\frac{dy}{dx} = C$ であるから

$$y = \frac{dy}{dx}x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (\text{答})$$

(注) 1° 微分方程式は関数を解とするので、 x で割れるかどうかは気にしなくてもよい。分数恒等式と同様、 $x \neq 0$ における解は $x = 0$ を含む定義域における解は同じである。むしろ、同次形(→ 5)を意識して x で割っておく方が形はきれいである。

2° $\frac{dy}{dx} = C$ (定数) と $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ は同値であるが、 y についての条件とは同値に

はならないので、 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ と求める微分方程式を混同してはならない。

一般に、未知定数の個数と微分方程式の階数は一致する。

(3) $\frac{dy}{dx} = 2Ce^{2x} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 2y \quad (\text{答})$

(4) $y = A \cos 3x + B \sin 3x$ を順次微分すると

$$\frac{dy}{dx} = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x \quad \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -9y \quad (\text{答})$$

2 確認：微分方程式を y だけの式 $f(y)$ と x だけの式 $g(x)$ を用いて

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \quad \dots\dots (A)$$

の形に表すことを変数分離するといひ、変数分離された式または、その前段階である

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad \left(f(y) = \frac{1}{h(y)} \right) \quad \dots\dots (B)$$

のような形を変数分離形という。微分方程式の解法は、(A)の形を見抜くか、(B)の形に整理して(A)に変形することが基本となる。

(1)で一般解を求める際には、適当に文字を置き直して、任意定数を一つにまとめることが重要である。特殊解を求めるには、まず一般解を完全に求めてから、初期条件により任意定数を定めればよい。それは、任意定数をまとめることで、代入計算を円滑に行なうためでもある。(2)のように、一般解を完全に求めると任意定数が散らばるような場合は、途中で定数を決定するなど柔軟に対処する。

解答：

(1) $2y - 1 \equiv 0$ すなわち $y \equiv \frac{1}{2}$ は一つの解である。

$2y - 1 \neq 0$ として、両辺 $2y - 1$ で割ると

$$\frac{1}{2y-1} \cdot \frac{dy}{dx} = x$$

両辺 x で積分すると

$$\frac{1}{2} \log |2y - 1| = \frac{1}{2}x^2 + c \quad (c \text{ は定数})$$

$$\log |2y - 1| = x^2 + 2c \quad \therefore |2y - 1| = e^{2c} e^{x^2}$$

あらためて $\pm e^{2c} = 2C$ とおくと、 $y \equiv \frac{1}{2}$ も含めて

$$2y - 1 = 2Ce^{x^2} \quad \therefore y = Ce^{x^2} + \frac{1}{2} \quad (C \text{ は任意定数}) \quad (\text{答})$$

(2) $x = 0$ のとき $y = 2$ であるから $y \equiv 0$ および $y \equiv 1$ は解ではない。変数分離すると

$$\frac{1}{y(1-y)} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \quad \therefore \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1} \right) \frac{dy}{dx} = 1$$

両辺 x で積分して

$$\log \left| \frac{y}{y-1} \right| = x + c \quad \therefore \left| \frac{y}{y-1} \right| = e^{x+c} \quad (c \text{ は定数})$$

$C = \pm e^c$ とおくと

$$\frac{y}{y-1} = Ce^x$$

$x = 0$ のとき $y = 2$ であるから $C = 2$ であり、

$$\frac{y}{y-1} = 2e^x \quad \therefore y = \frac{2e^x}{2e^x - 1} \quad (\text{答})$$

3 確認：微分方程式が

$$\frac{dy}{dx} + f'(x)y = g(x) \quad \dots\dots ①$$

の形のときは変数分離できないが，両辺に $e^{f(x)}$ をかけると

$$e^{f(x)} \frac{dy}{dx} + e^{f(x)} f'(x)y = e^{f(x)} g(x)$$

となるから，積の微分の公式より

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} y = e^{f(x)} \frac{dy}{dx} + e^{f(x)} f'(x)y = e^{f(x)} g(x)$$

$$e^{f(x)} y = \int e^{f(x)} g(x) dx$$

$$\therefore y = e^{-f(x)} \int e^{f(x)} g(x) dx \quad \dots\dots ②$$

と解くことができる。

歴史的には，任意定数を関数に置き換えて解いたことから定数変化法と呼ばれているが，その原典通りに①から②を導くと次のようになる。①において機械的に

$$\frac{dy}{dx} + f'(x)y = 0 \quad \dots\dots ③$$

とおくと，これは変数分離形であり，

$$\frac{dy}{dx} = -f'(x)y \quad \therefore \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -f'(x)$$

と変形して両辺を x で積分すると，

$$\log |y| = -f(x) + c \quad \therefore |y| = e^{-f(x) + c} \quad (c \text{ は定数})$$

$\pm e^c = C$ とおくと

$$y = C e^{-f(x)}$$

この関数自体は③の解であり，ここで C を関数 $C(x)$ に置き換えた

$$y = C(x) e^{-f(x)} \quad \dots\dots ④$$

を①に代入すると

$$C'(x) e^{-f(x)} + C(x) e^{-f(x)} \{-f'(x)\} + f'(x) \cdot C(x) e^{-f(x)} = g(x)$$

$$C'(x) e^{-f(x)} = g(x)$$

$$\therefore C'(x) = e^{f(x)} g(x)$$

この両辺を積分して④に代入すると，②と同じ式が得られる。

歴史的解法は一見まわりくどいように思えるが，積の微分の形に気づかないときには有効な手段である。

解答：

(1) (変数分離による解法) 与えられた微分方程式を

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 3$$

と変形して、両辺 x で積分すると

$$\log |y| = 3x + c \quad \therefore |y| = e^{3x+c} \quad (c \text{ は定数})$$

 $\pm e^c = C$ と置き換えて

$$y = Ce^{3x} \quad (C \text{ は定数}) \quad (\text{答})$$

(積の微分の公式を用いる解法) 与えられた微分方程式の両辺に e^{-3x} をかけると

$$e^{-3x} \frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 0 \quad \therefore \frac{d}{dx} e^{-3x}y = 0$$

両辺を x で積分すると

$$e^{-3x}y = C \quad (\text{定数}) \quad \therefore y = Ce^{3x} \quad (\text{答})$$

(2) $y = C(x)e^{3x}$ を

$$\frac{dy}{dx} - 3y = x$$

に代入すると

$$C'(x)e^{3x} + C(x) \cdot 3e^{3x} - 3C(x)e^{3x} = C'(x)e^{3x} = x$$

$$\therefore C'(x) = xe^{-3x}$$

積分して

$$\begin{aligned} C(x) &= \int xe^{-3x} dx \\ &= x \cdot \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x} dx \\ &= -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C \quad (C \text{ は定数}) \end{aligned}$$

$$\therefore y = C(x)e^{3x} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} + Ce^{3x} \quad (C \text{ は定数}) \quad (\text{答})$$

(3) 与えられた微分方程式は

$$\{(x^2 + 1)f(x)\}' = x \sin x$$

であるから、積分すると

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)f(x) - (0^2 + 1)f(0) &= \int_0^x t \sin t dt \\ &= \left[t(-\cos t) \right]_0^x - \int_0^x 1 \cdot (-\cos t) dt \\ &= -x \cos x + \sin x \end{aligned}$$

 $f(0) = 1$ より

$$f(x) = \frac{-x \cos x + \sin x + 1}{x^2 + 1} \quad (\text{答})$$

4 確認：本問は微分可能の定義と変数分離の組合せであり，基本解法として取り上げることもないのだが，一連の流れを経験しておくのは意義のあることであろう。

解答：

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(1) ①に $y = 0$ を代入すると

$$f(x) = f(x) + f(0) + f(x)f(0)$$

$$\{f(x) + 1\}f(0) = 0 \quad \therefore f(x) \equiv -1 \text{ または } f(0) = 0$$

$f(x) \equiv -1$ (定数関数)ならば， $f(x)$ はすべての $x = 0$ で微分可能である。

$y \neq 0$ として，①より

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \{f(x) + 1\} \frac{f(y)}{y} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$x = 0$ で $f(x)$ は微分可能であるから， $f(0) = 0$ であるとすれば

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = f'(0) \text{ (収束)} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

となって $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y}$ は収束する。

よって，いずれの場合も $f(x)$ はすべての x で微分可能である。 (おわり)

(2) $f(0) = 0$ のとき， $f'(0) = c$ とおくと，②，③より

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = c\{f(x) + 1\}$$

$$\therefore f'(x) - cf(x) = c$$

両辺に e^{-cx} をかけると

$$e^{-cx}f'(x) - ce^{-cx}f(x) = ce^{-cx} \quad \therefore \frac{d}{dx}e^{-cx}f(x) = ce^{-cx}$$

両辺を x で積分すると

$$e^{-cx}f(x) = -e^{-cx} + C \quad (C \text{ は定数})$$

$$\therefore f(x) = Ce^{cx} - 1$$

$f(0) = C - 1 = 0$ より $C = 1$ であるから

$$f(x) = e^{cx} - 1$$

$f(x) \equiv -1$ とあわせて，求める関数は

$$f(x) = e^{cx} - 1 \text{ または } f(x) = -1 \quad (c \text{ は定数}) \quad (\text{答})$$

(注) $e^c = a$ とおくことにより

$$f(x) = a^x - 1$$

とまとめることもできるが， 0^0 は定義できないので注釈が必要となる。

5 確認：定積分で表された関数の関係式を積分方程式という。基本的な考え方は

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \iff F'(x) = f(x) \text{ かつ } F(a) = 0$$

であり、微分方程式の特別な場合とみなされる。(積分記号の外から)微分したあとは、微分方程式の解法に従えばよい。広い意味では

$$f(x) = \cos x + \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t) \cos t dt$$

ような形も積分方程式であるが、変数分離などのひねりもなく積分計算だけで解けるので、このファイルでは取り上げない。(基本解法確認演習「積分法」を参照。)

解答：

$$\int_1^x 3tf(t) dt = (x^2 - x - 2)f(x) - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} 3xf(x) &= (2x - 1)f(x) + (x^2 - x - 2)f'(x) \\ (-x - 1)f(x) + (x + 1)(x - 2)f'(x) &= 0 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$x \neq -1, 2$ のとき

$$(x - 2)f'(x) = f(x) \quad \therefore \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - 2}$$

両辺を x で積分して

$$\begin{aligned} \log|f(x)| &= \log|x - 2| + c \quad (c \text{ は定数}) \quad \therefore f(x) = \pm e^c(x - 2) \\ \pm e^c &= C \text{ とおくと} \\ f(x) &= C(x - 2) \end{aligned}$$

①に $x = 1$ を代入すると

$$0 = -2f(0) - 4 \quad \therefore f(0) = -2$$

となるから、 $f(0) = -2C = -2$ より $C = 1$ と定まり、求める関数は

$$f(x) = x - 2 \quad (\text{答})$$

(注)

1° $x \neq -1, 2$ として解いているが、これは $f(x)$ が $x = -1, 2$ で定義されないということではなく、 $x \neq -1, 2$ においてつねに②を満たす関数として計算しているということである。 $x = -1, 2$ での条件だけが不明でも、関数は一意的に決まるというわけである。

2° $x \neq -1, 2$ のとき、②を

$$\begin{aligned} (x - 2)f'(x) - (x - 2)'f(x) &= 0 \\ \therefore \left(\frac{f(x)}{x - 2}\right)' &= \frac{(x - 2)f'(x) - (x - 2)'f(x)}{(x - 2)^2} = 0 \end{aligned}$$

と変形することにより、 $f(x) = C(x - 2)$ (C は定数) を導くこともできる。

6 確認：本問では、適当に変数変換して基本のパターンに帰着させることを考える。

- (1) $x + y = z$ とおくことにより、関数 z についての変数分離形となる。
 (2) 右辺は x, y の比で値が定まる同次分数式であるから、 $\frac{y}{x} = z$ と変換してみる。
 (3) $x - t = u$ により置換積分して、被積分関数が積分変数だけの定積分に直せば、5 の解法が適用できる。

解答：

(1) 与えられた微分方程式を

$$z = x + y \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

により変数変換すると、

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + z^2 \quad \therefore \frac{1}{1+z^2} \cdot \frac{dz}{dx} = 1$$

両辺 x で積分して

$$\int \frac{1}{1+z^2} dz = x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

ここで、左辺の積分については

$$z = \tan \theta \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

と置換することにより

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+z^2} dz &= \int \frac{1}{1+\tan^2 \theta} (\tan \theta)' d\theta \\ &= \int \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int d\theta = \theta - C \quad (C \text{ は定数}) \end{aligned}$$

②より

$$\theta = x + C$$

③、①に代入して

$$y = \tan(x + C) - x \quad (C \text{ は定数}) \quad (\text{答})$$

(2) 与えられた微分方程式を

$$y = xz \quad \dots\dots (*)$$

により変換すると、

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{x^2 + 2y^2}{2xy} = \frac{x}{2y} + \frac{y}{x}$$

より

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2z} + z \quad \therefore z \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2x}$$

両辺 x で積分すると

$$\frac{1}{2} z^2 = \frac{\log x + C}{2}$$

$$\therefore z^2 = \log x + C \quad (C \text{ は定数})$$

$x > 0, y > 0$ より $z > 0$ であるから,

$$z = \sqrt{\log x + C}$$

(*)より

$$y = x\sqrt{\log x + C} \quad (C \text{ は定数}) \quad (\text{答})$$

(3) $x - t = u$ により置換すると

$$\int_0^x f(x-t) dt = \int_x^0 f(u) \frac{dt}{du} du = \int_x^0 f(u)(-1) du = \int_0^x f(u) du$$

であるから, 与えられた積分方程式は

$$f(x) = x + \int_0^x f(u) du \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

両辺を x で微分すると

$$f'(x) = 1 + f(x)$$

$$f'(x) - f(x) = 1$$

両辺に e^{-x} をかけて

$$\frac{d}{dx} e^{-x} f(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{-x}$$

両辺を x で積分すると

$$e^{-x} f(x) = -e^{-x} + C$$

$$\therefore f(x) = Ce^x - 1 \quad (C \text{ は定数}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①に $x = 0$ を代入すると $f(0) = 0$ であるから, ②より

$$f(0) = C - 1 = 0 \quad \therefore C = 1$$

②に代入して, 求める関数は

$$f(x) = e^x - 1 \quad (\text{答})$$

7 確認：微分方程式に含まれる導関数のうち，最も高い階数を微分方程式の階数という。基本解法としては，2階線型微分方程式をおさえておけば十分である。

2階線型微分方程式とは $y'' + ay' + by = 0$ の形(定数項にあたる x だけの式が 0)の微分方程式のことであり， a, b が定数の場合は，数学 B の隣接 3 項間線型漸化式と解法は同じである。

$$(y' - \alpha y)' = \beta(y' - \alpha y) \quad (\alpha, \beta \text{ は定数})$$

とおくと，

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$$

であり，これと与えられた微分方程式を比べると α, β を定められる。すると，2 および 3 で確認した 1 階の微分方程式(変数分離形)に帰着される。

解答：

$$\{f'(x) - \alpha f(x)\}' = \beta\{f'(x) - \alpha f(x)\} \quad (\alpha, \beta \text{ は定数}) \quad \dots\dots ①$$

とおくと

$$f''(x) - (\alpha + \beta)f'(x) + \alpha\beta f(x) = 0$$

となるから，与えられた微分方程式と比べると

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = -4$$

である。解と係数の関係より， α, β を 2 解とする 2 次方程式は

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \therefore (x + 1)(x - 4) = 0$$

$$\therefore (\alpha, \beta) = (-1, 4), (4, -1)$$

これをもとに

$$g(x) = f'(x) + f(x), \quad h(x) = f'(x) - 4f(x) \quad \dots\dots ②$$

とおくと，①より

$$g'(x) = 4g(x) \quad \dots\dots ③$$

$$h'(x) = -h(x) \quad \dots\dots ④$$

③より

$$g'(x) - 4g(x) = 0 \\ e^{-4x}g'(x) - 4e^{-4x}g(x) = 0 \quad \therefore \{e^{-4x}g(x)\}' = 0$$

両辺を x で積分すると

$$e^{-4x}g(x) = A \text{ (定数)} \quad \therefore g(x) = Ae^{4x}$$

同様にして，④より $h(x) = Be^{-x}$ (B は定数)であり，②より

$$f'(x) + f(x) = Ae^{4x}, \quad f'(x) - 4f(x) = Be^{-x}$$

$f(0) = 1, f'(0) = 9$ より

$$A = f'(0) + f(0) = 10, \quad B = f'(0) - 4f(0) = 5$$

であるから，

$$f'(x) + f(x) = 10e^{4x}, \quad f'(x) - 4f(x) = 5e^{-x}$$

2 式の差をとって $f'(x)$ を消去すると，

$$5f(x) = 10e^{4x} - 5e^{-x} \quad \therefore f(x) = 2e^{4x} - e^{-x} \quad (\text{答})$$

8 確認：物理学で微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$$

が出てくるが、(高校物理では)何の説明もなく解が

$$x = A \sin kt + B \cos kt \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

とされていて戸惑った人も多いだろう。

本問では、演習問題の形でこれを証明する。数学としては、必ずヒントがつくので、心配は無用である。

解答：

$$f''(t) = -k^2 f(t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(1) \quad F(t) = f'(t) \cos kt + kf(t) \sin kt \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} F'(t) &= f''(t) \cos kt + f'(t) \cdot (-k \sin kt) + kf'(t) \sin kt + kf(t) \cdot k \cos kt \\ &= \{f''(t) + k^2 f(t)\} \cos kt \end{aligned}$$

①より

$$F'(t) = 0 \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad G(t) = -f'(t) \sin kt + kf(t) \cos kt \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} G'(t) &= -f''(t) \sin kt - f'(t) \cdot k \cos kt + kf'(t) \cos kt + kf(t) \cdot (-k \sin kt) \\ &= -\{f''(t) + k^2 f(t)\} \sin kt \end{aligned}$$

①より

$$G'(t) = 0 \quad \therefore G(t) = b \text{ (定数)} \quad (\text{答}) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

(3) (1)の結果を積分すると

$$F(t) = a \quad (a \text{ は定数}) \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

②, ③, ④, ⑤より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos kt & \sin kt \\ -\sin kt & \cos kt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) \\ kf(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} f'(t) \\ kf(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos kt & -\sin kt \\ \sin kt & \cos kt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A = \frac{a}{k}, \quad B = \frac{b}{k} \quad \text{とおくと}$$

$$f(t) = A \sin kt + B \cos kt \quad (A, B \text{ は定数}) \quad (\text{答})$$

9 確認：問題文の条件から微分方程式を立てて、曲線の方程式を求める練習をする。

- (1) 関数のグラフとは限らないので、 $P(x(t), y(t))$ とパラメタ表示して微分方程式を立てる。
- (2) $P(x, f(x))$ における接線を $Y = f'(x)(X - x) + f(x)$ として、題意の条件を微分方程式の形で表現する。
- (3) $g(x)$ についての微分方程式はここまでの基本解法では解けないように思えるが、条件 $g''(x) \neq 0$ がどこかで使われるはずだと考えて、さらに微分してみる。

解答：

- (1) $P(x(t), y(t))$ とおくと、ベクトル $\vec{v} = (x'(t), y'(t))$ は点 P における曲線の接線に方向を表し、 \vec{OP} と垂直であるから

$$\vec{OP} \cdot \vec{v} = x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0$$

両辺を t で積分すると

$$\frac{1}{2}x(t)^2 + \frac{1}{2}y(t)^2 = C \quad (\text{定数})$$

$x(t)^2 + y(t)^2 \geq 0$ より $2C = r^2$ とおくことができ、点 P の軌跡の方程式は

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (r \text{ は正の定数}) \quad (\text{答})$$

- (2) $P(x, f(x))$ における接線の方程式は

$$Y = f'(x)(X - x) + f(x)$$

$Y = 0$ とおくと

$$f'(x)X = xf'(x) - f(x)$$

接線が x 軸とも y 軸とも交わるから $f'(x) \neq 0$ であり、

$$X = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \therefore Q\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}, 0\right)$$

$X = 0$ とおくと

$$Y = -xf'(x) + f(x) \quad \therefore R(0, -xf'(x) + f(x))$$

P は QR の中点であるから

$$x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) \quad \text{かつ} \quad f(x) = \frac{-xf'(x) + f(x)}{2}$$

いずれの場合も

$$xf'(x) + f(x) = 0$$

であり、積の微分の公式より

$$\frac{d}{dx} xf(x) = 0$$

積分すると

$$xf(x) = C \quad (\text{定数})$$

$$\therefore f(x) = \frac{C}{x} \quad (C \text{ は定数}) \quad (\text{答})$$

(3) $x = t$ における曲線 $y = g(x)$ の接線の方程式は

$$y = g'(t)(x - t) + g(t)$$

これが直線 $y = mx - m^2$ と一致するとすれば,

$$m = g'(t) \quad \text{かつ} \quad -m^2 = -tg'(t) + g(t)$$

m を消去すると

$$g'(t)^2 = tg'(t) - g(t) \quad \dots\dots (*)$$

両辺を t で微分すると

$$2g'(t)g''(t) = 1 \cdot g'(t) + tg''(t) - g'(t)$$

$$\therefore 2g'(t)g''(t) = tg''(t)$$

$g''(t) \neq 0$ より

$$g'(t) = \frac{1}{2}t$$

となるから, $(*)$ に代入して

$$g(t) = \frac{1}{4}t^2 \quad \therefore g(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad (\text{答})$$

(注) パラメタ m の値によらずつねに直線 $y = mx - m^2$ に接する曲線 $y = g(x)$ を直線 $y = mx - m^2$ の包絡線という。大学で学ぶ微分幾何学の知識を用いると,

$$F(m) = mx - m^2 - y$$

とにおいて

$$F(m) = 0 \quad \text{かつ} \quad F'(m) = 0$$

から包絡線のパラメタ表示

$$x = 2m, \quad y = m^2$$

が容易に得られるが, 大学入試でこれをそのまま用いるのは避けた方がよい。

10 確認：水の問題は、容積または容積速度を 2 通りに表して微分積分の計算をすると、容易に解決できる。本問では、微分方程式を解くタイプになっているものを体験しておくことにする。

解答：

(1) 時間が t だけ経過したときの容積 V は

$$V = \int_0^{h(t)} \pi(\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^{h(t)} y dy$$

であり、時間の変数 t で微分すると

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \pi h(t) h'(t)$$

$h(t) > 0$ のとき

$$\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h(t)}$$

が成り立つから、

$$\pi\sqrt{h(t)} h'(t) = -1 \quad (\text{答})$$

(2) (1)で求めた微分方程式の両辺を t で積分すると

$$\frac{2}{3}\pi h(t)^{\frac{3}{2}} = -t + C \quad (C \text{ は定数})$$

$h(0) = 1$ より $C = \frac{2}{3}\pi$ であるから、

$$h(t)^{\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2\pi}t + 1 \quad \therefore h(t) = \left(1 - \frac{3}{2\pi}t\right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{答})$$