I　C の $x=a$ における接線 m の方程式は

$$y=(a-1)(x-a)+\frac{1}{2}a^2-a+\frac{3}{2}\qquad\therefore\ y=(a-1)x-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}$$

ℓ と m が交わらないのは $\ell /\!/ m$ のときであり，

$$a-1=1\qquad\therefore\ a=\boxed{2}\ (ア)$$

ℓ の傾きは $\tan\dfrac{\pi}{4}$ であり，m は y 軸に平行でないから，ℓ と m が $\dfrac{\pi}{4}$ をなすのは

$$a-1=0\qquad\therefore\ a=\boxed{1}\ (イ)$$

$a\neq 2$ のもとで，連立方程式 $\begin{cases}y=x-1\\ y=(a-1)x-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{3}{2}\end{cases}$ を解いて，ℓ と m の交点の座標を求めると

$$(a-1)x-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}=x-1$$
$$(a-2)x=\frac{1}{2}a^2-\frac{5}{2}$$
$$\therefore\ x=\frac{a^2-5}{2(a-2)},\quad y=x-1=\frac{a^2-2a-1}{2(a-2)}$$

よって，ℓ と m が第 4 象限で交わるのは

$$\frac{a^2-5}{2(a-2)}>0\ \text{かつ}\ \frac{a^2-2a-1}{2(a-2)}<0$$

のときであり，

$$\begin{cases}(a-2)(a^2-5)>0 & \cdots\cdots\ ①\\ (a-2)(a^2-2a-1)<0 & \cdots\cdots\ ②\end{cases}$$

$$① \iff -\sqrt{5}<a<2\ \text{または}\ a>\sqrt{5}$$
$$② \iff a<1-\sqrt{2}\ \text{または}\ 2<a<1+\sqrt{2}$$

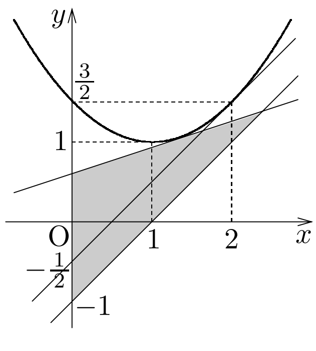
①かつ②より

$$\underset{(ウ)}{\boxed{-\sqrt{5}}}<a<\underset{(エ)}{\boxed{1-\sqrt{2}}}\ \text{または}\ \underset{(オ)}{\boxed{\sqrt{5}}}<a<\underset{(カ)}{\boxed{1+\sqrt{2}}}$$

$0\leqq a\leqq\dfrac{5}{3}$ のとき，特に $a<2$ であるから m は ℓ と $x>0$ で，y 軸と $y>-1$ で交わり，ℓ と m と y 軸とで囲まれた部分の面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}+1\right)\frac{a^2-5}{2(a-2)}$$
$$=-\frac{1}{8}\cdot\frac{(a^2-5)^2}{a-2}$$

である。



$$
\begin{aligned}
S'(a) &= -\frac{1}{8}\cdot\frac{2(a^2-5)\cdot 2a\cdot(a-2)-(a^2-5)^2\cdot 1}{(a-2)^2}\\
&= -\frac{1}{8}\cdot\frac{(a^2-5)\{4a(a-2)-(a^2-5)\}}{(a-2)^2}\\
&= \frac{(5-a^2)(3a^2-8a+5)}{8(a-2)^2}\\
&= \frac{(5-a^2)(3a-5)(a-1)}{8(a-2)^2}
\end{aligned}
$$

$0<a<\dfrac{5}{3}$ において $S'(a)$ は $-(a-1)$ と同符号であるから，$S(a)$ の増減は

a	0		1		$\frac{5}{3}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	極大	↘	

となり，面積 $S(a)$ は

$$a = \boxed{1}\ \text{(キ)}$$

のとき最大となる。

II　$\mathrm{P}_n(a_n,\ \log a_n)$，$a_1 = a$ とおくと，P_n における $y = \log x$ の接線の方程式は

$$y = \frac{1}{a_n}(x - a_n) + \log a_n \qquad \therefore\ y = \frac{1}{a_n}x + \log a_n - 1$$

y 軸との交点が Q_{n+1} であるから

$$\mathrm{Q}_{n+1}(0,\ \log a_n - 1)$$

$\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}$ は x 軸に平行であるから

$$\log a_{n+1} = \log a_n - 1 = \log e^{-1}a_n \qquad \therefore\ a_{n+1} = \frac{1}{e}a_n$$

$\{a_n\}$ は初項 $a_1 = a$，公比 $\dfrac{1}{e}$ の等比数列であるから

$$a_2 = \underset{(ク)}{\boxed{\frac{a}{e}}},\quad a_{n+1} = \underset{(ケ)}{\boxed{\frac{a}{e^n}}}$$

直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}$，直線 $x = a_{n+1}$ および曲線 $y = \log x$ で囲まれた部分の面積 S_n は

$$\begin{aligned}
S_n &= \int_{a_{n+1}}^{a_n}\left(\frac{1}{a_n}x + \log a_n - 1 - \log x\right)dx \\
&= \left[\frac{1}{2a_n}x^2 + (\log a_n - 1)x - x(\log x - 1)\right]_{a_{n+1}}^{a_n} \\
&= \frac{{a_n}^2 - {a_{n+1}}^2}{2a_n} - (\log a_n - 1)a_{n+1} + a_{n+1}(\log a_{n+1} - 1) \\
&= \frac{a_n}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^2\right\} + a_{n+1}\log\frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \frac{a}{2e^{n-1}}\cdot\frac{e^2 - 1}{e^2} + \frac{a}{e^n}\log\frac{1}{e} \\
&= \frac{a(e^2 - 1) - 2ae}{2e^{n+1}} \\
&= \frac{a(e^2 - 2e - 1)}{2e^{n+1}}
\end{aligned}$$

よって，$\{S_n\}$ は初項 $S_1 = \dfrac{a\left(\overset{(コ)}{\boxed{e^2 - 2e - 1}}\right)}{2e^2}$，公比 $\dfrac{1}{e}$ の等比数列であり，

$$0 < \frac{1}{e} < 1$$

より無限等比数列 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は収束するから，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1 - \dfrac{1}{e}} = \frac{a(e^2 - 2e - 1)}{\underset{(サ)}{\boxed{2e(e - 1)}}}$$

III

(1) $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ における円 C_1 の接線 ℓ の方程式は，公式より

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1 \quad (答) \qquad \cdots\cdots ①$$

(2) $\mathrm{Q}(x_1,\ {x_1}^2-2)$ における C_2 の接線の方程式は

$$y = 2x_1(x-x_1)+{x_1}^2-2$$

$$\therefore\ \ y = 2x_1x-{x_1}^2-2 \qquad \cdots\cdots ②$$

$\mathrm{R}(x_2,\ {x_2}^2-2)$ における C_2 の接線の方程式は

$$y = 2x_2x-{x_2}^2-2 \qquad \cdots\cdots ③$$

$x_1 \neq x_2$ のもとで ②かつ③ を解くことにより，2 接線②, ③の交点 S の座標は

$$\mathrm{S}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ x_1x_2-2\right) \quad (答)$$

(3) ①かつ $y=x^2-2$ より y を消去すると

$$x\cos\theta + (x^2-2)\sin\theta = 1$$

$0<\theta<2\pi,\ \ \theta\neq\pi$ のもとで，

$$x^2+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x-2-\frac{1}{\sin\theta}=0$$

この 2 次方程式は相異なる 2 実数解を持ち，その 2 解が $x_1,\ x_2$ であるから

$$x_1+x_2=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\quad x_1x_2=-2-\frac{1}{\sin\theta} \qquad \cdots\cdots ④$$

$\mathrm{S}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=x_1x_2-2 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④かつ⑤ より $x_1,\ x_2$ を消去すると

$$x=-\frac{\cos\theta}{2\sin\theta},\quad y=-4-\frac{1}{\sin\theta} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

θ を消去すると

$$x^2=\frac{1-\sin^2\theta}{4\sin^2\theta}=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2-1\right\}=\frac{1}{4}\left\{(y+4)^2-1\right\}$$

よって，点 S の軌跡は

$$双曲線\ (y+4)^2-\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1 \quad (答)$$

(注) $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ とおくと，⑥は

$$x=-\frac{1}{2}\tan\varphi=\frac{1}{2}\tan(\pi-\varphi),\quad y+4=-\frac{1}{\cos\varphi}=\frac{1}{\cos(\pi-\varphi)}$$

となって，双曲線のパラメタ表示(教科書の公式)を表す。

IV

(1) $f'(x) = 1 + a\cos x - b\sin x$

$x = \dfrac{\pi}{3}$ と $x = \pi$ において極値をとるから，

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \text{ かつ } f'(\pi) = 1 - a = 0$$

が必要である。このとき $a = 1$，$b = \sqrt{3}$ であり，

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \cos x - \sqrt{3}\sin x \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) + 1 \\ &= 2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3} - \sin x\sin\frac{\pi}{3}\right) + 1 \\ &= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \end{aligned}$$

x	(0)		$\frac{\pi}{3}$		π		(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$(\sqrt{3})$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，関数 $f(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{3}$ と $x = \pi$ において実際に極値をとるから十分であり，

$a = 1$，$b = \sqrt{3}$ (答)

$0 < x < 2\pi$ における関数 $f(x) = x + \sin x + \sqrt{3}\cos x$ の極値は

極大値 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \sqrt{3}$，極小値 $f(\pi) = \pi - \sqrt{3}$ (答)

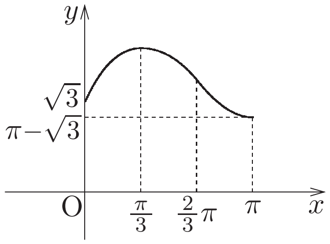
(2) $$\begin{aligned} f''(x) = -\sin x - \sqrt{3}\cos x &= -2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) \\ &= -2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

x	0		$\frac{2}{3}\pi$		π
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cap$	変曲点	$\cup$	

$0 \leqq x \leqq \pi$ における曲線 $y = f(x)$ の変曲点は

$\left(\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$ (答)

(2)の増減表も参考にして，$0 \leqq x \leqq \pi$ における曲線 $y = f(x)$ の概形は



(答)

(3)　求める回転体の体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi} \pi f(x)^2\,dx \\
&= \pi\int_0^{\pi} \left\{x^2 + (\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2 + 2x(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\right\}dx \\
&= \pi\int_0^{\pi} \left\{x^2 + 4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 4x\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right\}dx \\
&= \pi\int_0^{\pi} \left\{x^2 + 2 - 2\cos\left(2x + \frac{2}{3}\pi\right) - 4x\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right\}dx \\
&= \pi\left[\frac{x^3}{3} + 2x - \sin\left(2x + \frac{2}{3}\pi\right) + 4x\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\pi} \\
&\qquad\qquad - 4\pi\int_0^{\pi} 1\cdot\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)dx \\
&= \pi\left\{\frac{\pi^3}{3} + 2\pi - 0 + 4\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} - 4\pi\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi^4}{3} - 4\pi\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{\pi^4}{3} + 4\sqrt{3}\,\pi \quad \text{(答)}
\end{aligned}
$$