2009 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学

(試験時間　15：10〜16：50　100 分)

1．解答用紙は，記述解答用紙とマーク解答用紙の 2 種類がありますので注意してください。

2．解答は，必ず解答欄に記入してください。なお，解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。

3．解答は，HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に，マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。

　また，折りまげたり，汚したりしないでください。記述解答用紙の下敷きにマーク解答用紙を使用することは絶対にさけてください。

4．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。

5．マーク解答用紙の受験番号および受験番号のマーク記入は，電算処理上非常に重要なので，誤記のないよう特に注意してください。

6．設問文にある点数は，満点が 100 点となるような配点表示になっていますが，数学科の配点は 200 点になります。

I　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

$y=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{3}{2}$ のグラフを C とし，$y=x-1$ で表される直線を ℓ とする。

グラフ C の $x=a$ における接線を m とする。直線 ℓ と接線 m が交わらないような a の値は $\boxed{\text{ア}}$ で，ℓ と m とのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ となるような a の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。直線 ℓ と接線 m の交点が第4象限にあるような a の範囲は $\boxed{\text{ウ}}<a<\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}<a<\boxed{\text{カ}}$ である（ただし，$\boxed{\text{エ}}<\boxed{\text{オ}}$ とする）。

また，$0\leqq a\leqq\dfrac{5}{3}$ の範囲で，直線 ℓ と接線 m および y 軸とで囲まれた部分の面積が最大となる a の値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

問題Iのア，イ，ウ，エ，オ，カ，キの解答群

ⓐ -1　ⓑ 0　ⓒ $\dfrac{1}{2}$　ⓓ 1　ⓔ $\dfrac{3}{2}$

ⓕ 2　ⓖ $\dfrac{5}{2}$　ⓗ $\dfrac{5}{3}$　ⓘ 3　ⓙ $-1-\sqrt{5}$

ⓚ $-1-\sqrt{2}$　ⓛ $-\sqrt{5}$　ⓜ $-\sqrt{3}$　ⓝ $-\sqrt{2}$　ⓞ $1-\sqrt{5}$

ⓟ $1-\sqrt{2}$　ⓠ $\sqrt{2}-1$　ⓡ $\sqrt{5}-1$　ⓢ $\sqrt{2}$　ⓣ $\sqrt{3}$

ⓤ $\sqrt{5}$　ⓥ $1+\sqrt{2}$　ⓦ $1+\sqrt{5}$

（設問は次ページに続く。）

II　次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び，その記号をマークせよ。ただし，同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

曲線 $y = \log x$ 上に点列 P_1, P_2, …, P_n, …, y 軸上に点列 Q_1, Q_2, …, Q_n, …があり，直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ は x 軸に平行で，直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ は点 P_n においてこの曲線に接している。

点 P_1 の座標を $(a, \log a)$ とするとき，点 P_2 の x 座標は $\boxed{\text{ク}}$ で点 P_{n+1} の x 座標は $\boxed{\text{ケ}}$ である。また，直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}$，直線 $x = \boxed{\text{ケ}}$ およびこの曲線で囲まれた部分の面積を S_n とする。面積 S_1 は $\dfrac{a(\boxed{\text{コ}})}{2e^2}$，無限級数 $S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$ の和は $\dfrac{a(\boxed{\text{コ}})}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

問題IIのク，ケの解答群

ⓐ a　ⓑ ae　ⓒ ae^2　ⓓ ae^{n-1}　ⓔ ae^n　ⓕ ae^{n+1}

ⓖ $\dfrac{a}{e}$　ⓗ $\dfrac{a}{e^2}$　ⓘ $\dfrac{a}{e^{n-1}}$　ⓙ $\dfrac{a}{e^n}$　ⓚ $\dfrac{a}{e^{n+1}}$

問題IIのコ，サの解答群

ⓐ $e^2 - 2e - 1$　ⓑ $e^2 + 2e - 1$　ⓒ $2e^2 + e - 1$　ⓓ $3e^2 + 2e - 1$

ⓔ $e^2 - 2e + 1$　ⓕ $2e^2(e+1)$　ⓖ $2e^2(e-1)$　ⓗ $2(e-1)$

ⓘ $2(e+1)$　ⓙ $2e(e-1)$　ⓚ $2e(e+1)$

（設問は次ページに続く。）

III　原点 O$(0,0)$ を中心とする半径1の円 C_1：$x^2+y^2=1$ と放物線 C_2：$y=x^2-2$ がある。円 C_1 上の点 P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ における C_1 の接線を ℓ とする。ただし $0<\theta<2\pi$, $\theta\neq\pi$ とする。次の問いに答えよ。(30点)

(1)　接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　放物線 C_2 上の異なる2点 Q(x_1, y_1) と R(x_2, y_2) における C_2 の接線の交点を S とするとき，S の座標を x_1 と x_2 で表せ。

(3)　(2) の点 Q と R は，接線 ℓ と放物線 C_2 の交点であるとする。θ が $0<\theta<2\pi$, $\theta\neq\pi$ の範囲を動くとき，点 S の軌跡を求めよ。

(設問は次ページに続く。)

IV　関数 $f(x) = x + a\sin x + b\cos x$ は $x = \dfrac{\pi}{3}$ と $x = \pi$ において極値をとるとする。ただし a と b は定数である。次の問いに答えよ。(30 点)

(1)　定数 a と b を求め，$0 < x < 2\pi$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲での曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ。また，$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲でこの曲線の概形をかけ。

(3)　直線 $x = 0$ と直線 $x = \pi$，曲線 $y = f(x)$ および x 軸とで囲まれた部分を x 軸のまわりに１回転させてできる回転体の体積を求めよ。

（以下計算用紙）