

## 1 (放物線の標準形)

- (1)  $p$  を 0 でない定数とする。点  $(p, 0)$  と直線  $x = -p$  から等距離にある点  $(x, y)$  がえがく曲線の方程式を計算により導け。
- (2) 曲線  $y^2 - 2y - 2x + 5 = 0$  が放物線であることを示し, その頂点と焦点の座標および準線の方程式をそれぞれ求めよ。

## 2 (楕円の標準形)

- (1)  $a, c$  を  $a > c > 0$  を満たす定数とする。2 点  $F(c, 0), F'(-c, 0)$  からの距離の和が  $2a$  となる点  $(x, y)$  がえがく曲線の方程式を計算により導け。
- (2) 曲線  $x^2 + 4y^2 - 8x - 24y + 48 = 0$  が楕円であることを示し, その焦点の座標を求めよ。

3 (双曲線の標準形)

- (1)  $a, c$  を  $c > a > 0$  を満たす定数とする。2点  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  からの距離の差が  $2a$  となる点がえがく曲線の方程式を計算により導け。
- (2) 曲線  $9x^2 - 4y^2 - 36x - 16y - 16 = 0$  が双曲線であることを示し, その焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ。

4 (放物線の接線)

放物線  $y^2 = 4px$  を  $C$  とする。

- (1) 放物線  $C$  上の点  $(\alpha, \beta)$  における接線の方程式は  $\beta y = 2p(x + \alpha)$  であることを示せ。
- (2) 放物線  $C$  上の頂点でない点  $P$  から準線におろした垂線の足を  $H$  とし, 焦点を  $F$  とする。このとき, 点  $P$  における  $C$  の接線は  $\angle FPH$  を二等分することを証明せよ。
- (3) 放物線  $C$  にひいた直交する 2 接線の交点の軌跡を求めよ。

## 5 (楕円の接線)

楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  を  $E$  とする。

- (1) 楕円  $E$  上の点  $(\alpha, \beta)$  における接線の方程式は  $\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 1$  であることを示せ。
- (2) 楕円  $E$  の2つの焦点を  $F, F'$  とし, 楕円  $E$  上に長軸の端点とは異なる点  $P$  をとり, 点  $P$  における  $E$  の接線に  $F, F'$  からおろした垂線の足をそれぞれ  $H, H'$  とする。このとき,  $\angle HPF = \angle H'PF'$  であることを証明せよ。
- (3) 楕円  $E$  にひいた直交する2接線の交点の軌跡を求めよ。

## 6 (双曲線の接線)

原点を  $O$ , 双曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  を  $C$  とする。

- (1) 双曲線  $C$  上の点  $(\alpha, \beta)$  における接線の方程式は  $\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} = 1$  であることを示せ。
- (2) 双曲線  $C$  の2つの焦点を  $F, F'$  とし, 双曲線  $C$  上に頂点とは異なる点  $P$  をとり, 点  $P$  における  $C$  の接線と  $x$  軸との交点を  $Q$  とする。このとき,  $\angle FPQ = \angle F'PQ$  であることを証明せよ。
- (3) 双曲線  $C$  上の点  $P$  における接線と漸近線との交点を  $Q, R$  とする。このとき, 点  $P$  の位置によらず, 三角形  $OQR$  の面積は一定で, 点  $P$  は線分  $QR$  の中点であることを証明せよ。

## 7 (極線)

- (1) 放物線  $y^2 = 4px$  の焦点を通る直線を  $l$  とし,  $l$  とこの放物線との交点を  $P, Q$  とする。直線  $l$  が動くとき,  $P, Q$  における放物線の 2 接線の交点の軌跡を求めよ。
- (2) 楕円  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  の外部の点  $A(x_0, y_0)$  から楕円  $E$  にひいた 2 本の接線の接点を  $B, C$  とする。さらに, 直線  $BC$  上で楕円  $E$  の外部にある点  $P$  を任意にとり, 点  $P$  から楕円  $E$  にひいた 2 本の接線の接点を  $Q, R$  とする。このとき, 直線  $QR$  は点  $A$  を通ることを示せ。

## 8 (2 次曲線の媒介変数表示)

- (1)  $\theta$  が  $0 \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$  の範囲を動くとき, 点  $(2 \cos \theta, \sin \theta)$  がえがく図形を図示せよ。
- (2) 双曲線  $x^2 - y^2 = 1$  上の点  $P$  から直線  $y = 2x$  におろした垂線の足を  $H$  とするとき,  $PH$  の長さの最小値を求めよ。

## 9 (媒介変数表示曲線)

- (1) 半径  $a$  の円が  $x$  軸に接しなからず回転するとき、円周上に固定された点  $P$  が描くサイクロイドを表す式を求めよ。ただし、円の中心の  $y$  座標は正であり、サイクロイドは原点  $O$  を通るものとする。
- (2) 円  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a$  は正の定数) に内接する半径  $\frac{a}{4}$  の円周上に固定された点  $P$  の軌跡で、点  $(a, 0)$  を通る曲線  $C$  を表す式を求めよ。また、この曲線上の座標軸上にない点における接線は、座標軸によって切り取られる線分の長さが一定であることを示せ。

## 10 (極座標と極方程式)

- (1) 極座標  $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$  の点を中心とする半径  $\frac{a}{2}$  の円の極方程式を求めよ。
- (2)  $O$  を極とする極座標  $\left(a, \frac{\pi}{6}\right)$  の点を  $A$  とする。点  $A$  を通り、 $OA$  に垂直な直線の極方程式を求めよ。ただし、 $a$  は正の定数とする。
- (3) 双曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  の焦点  $F(ae, 0)$  を極、 $x$  軸の正の方向を始線とするとき、この双曲線の  $x > 0$  の部分の極方程式を求めよ。ただし、 $e$  は正の定数とする。

## 11 (離心率)

- (1)  $e$  を 1 でない正の定数,  $a$  を正の定数とし,  $F(ae, 0)$  とする。点  $P$  から定直線  $x = \frac{a}{e}$  におろした垂線の足を  $H$  とするとき,

$$\frac{PF}{PH} = e$$

を満たす点  $P$  の軌跡はどのような曲線になるか。

- (2) 定直線  $\ell$  から距離  $a$  だけ離れた定点を  $F$  とし, 動点  $P$  から定直線  $\ell$  におろした垂線の足を  $H$  とする。

$$\frac{PF}{PH} = e$$

を満たす点  $P$  の軌跡の極方程式を求めよ。ただし,  $F$  を極とし, 始線の向きは  $F$  から定直線  $\ell$  におろした垂線とは逆向きとする。

## 12 (極座標と図形量)

- (1) 楕円の一つの焦点  $F$  を通る直線とこの楕円との交点を  $P, Q$  とするとき,

$$\frac{1}{FP} + \frac{1}{FQ} \text{ の値は一定であることを示せ。}$$

- (2) 楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) に内接するひし形が原点を中心とする単位円に外接するための  $a, b$  についての必要十分条件を求めよ。

1 確認：定直線  $l$  上にない定点  $F$  からの距離と  $l$  からの距離が等しい点があがく曲線を放物線(parabola)といい、定点  $F$  を焦点、定直線  $l$  を準線という。parabola とはもともと等価という意味で、定義の内容がそのまま名前の由来になっている。

放物線は、焦点を通り準線に垂直な直線に関して対称であり、この対称軸を放物線の軸という。軸と放物線の交点を頂点といい、準線に垂直な方向の存在範囲の限界点となる。

$p \neq 0$  として焦点を  $(p, 0)$ 、準線を  $x = -p$  にとると頂点は原点となり、方程式は(1)の計算により

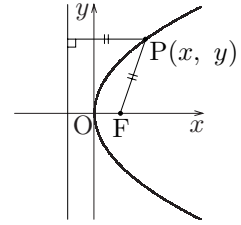
$$y^2 = 4px$$

となる。この式の形を標準形という。(2)では、標準形に直すことで、放物線であることを示すと考えてよいだろう。

放物線の頂点を  $(\alpha, \beta)$  とすると、方程式は

$$(y - \beta)^2 = 4p(x - \alpha)$$

となり、頂点の座標は平行移動量を表すベクトルの成分と等しい。放物線は、軸を  $y$  軸に平行にとると、2 次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフとなる。



解答：

(1) 題意の曲線上の任意の点を  $(x, y)$  とすると、

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-p)^2 + y^2} &= |x - (-p)| \\ (x-p)^2 + y^2 &= (x+p)^2 \\ \therefore y^2 &= 4px \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2)  $y^2 - 2y - 2x + 5 = 0$  を平方完成して整理すると、

$$\begin{aligned} (y-1)^2 &= 2x-4 \\ \therefore (y-1)^2 &= 4 \cdot \frac{1}{2}(x-2) \end{aligned}$$

よって、この曲線は放物線であり、

頂点の座標は  $(2, 1)$  (答)

ところで、放物線  $y^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}x$  の焦点と準線は、公式よりそれぞれ

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad x = -\frac{1}{2}$$

であるから、これらを  $x$  軸方向に 2、 $y$  軸方向に 1 だけ平行移動させることにより

焦点は  $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ 、準線は  $x = \frac{3}{2}$  (答)

2 確認：2 定点からの距離の和が一定である点の軌跡を楕円(ellipse)といい，2 定点を焦点という。ellipse とは不足を意味し，離心率 (→ 11) が 1 より小さいことが名前の由来になっている。

(1)のように  $a > c > 0$  として焦点を  $(c, 0)$ ,  $(-c, 0)$  にとると，中心は原点となり，方程式は  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$  となる。  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  とおくと，方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

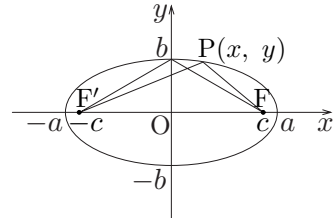
となり，円と結びつけられるので都合が良い。

このとき，焦点の座標は

$$(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), \quad (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

となる。

原点を中心とする楕円は  $x$  軸に関して  $y$  軸に関して対称であり， $x$  軸との交点は  $A(a, 0)$  と  $A'(-a, 0)$ ， $y$  軸との交点は  $B(0, b)$  と  $B'(0, -b)$  である。焦点が  $x$  軸上にある場合は，楕円上の 2 点間距離が最長となる  $AA'$  を長軸といい，最短となる  $BB'$  を短軸という。したがって，2 焦点からの距離の和  $2a$  は長軸の長さとも一致する。



解答：

(1) 題意の曲線上の任意の点を  $(x, y)$  とすると，

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

両辺を平方して

$$2(x^2 + y^2 + c^2) + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - (2cx)^2} = 4a^2$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - (2cx)^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2)$$

再び両辺を平方して

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - (2cx)^2 = 4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + (x^2 + y^2 + c^2)^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (\text{答})$$

(2)  $x^2 + 4y^2 - 8x - 24y + 48 = 0$  を平方完成して整理すると

$$(x-4)^2 + 4(y-3)^2 = 4$$

$$\therefore \frac{(x-4)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{1^2} = 1$$

よって，この曲線は楕円である。

ところで，楕円  $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$  の焦点は，公式より

$$(\sqrt{3}, 0), \quad (-\sqrt{3}, 0)$$

であるから， $x$  軸方向に 4， $y$  軸方向に 3 だけ平行移動させて，求める焦点は

$$(4 + \sqrt{3}, 3), \quad (4 - \sqrt{3}, 3) \quad (\text{答})$$

3 確認：2 定点からの距離の差が一定である点の軌跡を双曲線(hyperbola)といい，2 定点を焦点という。hyperbola とは過剰を意味し，離心率 (→ 11) が 1 より大きいことが名前の由来になっている。

(1)のように  $c > a > 0$  として焦点を  $(c, 0)$ ,  $(-c, 0)$  にとると， $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$  が方程式となり， $b = \sqrt{c^2 - a^2}$  とおくと

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

とスッキリ表される。このとき，焦点の座標は

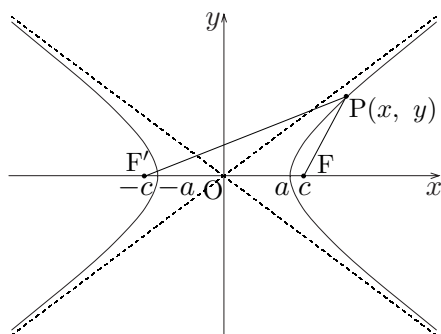
$$(\sqrt{a^2 + b^2}, 0), \quad (-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$$

となる。方程式が反比例の式  $XY = 1$  と似ていることから類推できるように

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \text{ は漸近線}$$

を表す。公式としては  $y = \pm \frac{b}{a}x$  と覚えておきたい。(証明は極限の練習問題)

楕円と同じように， $FF'$  の中点を双曲線の中心といい，直線  $FF'$  および  $FF'$  の垂直二等分線に関して対称である。また，2 焦点を通る直線と双曲線の交点を頂点といい，2 焦点からの距離の差  $2a$  は 2 頂点間の距離と一致する。



解答：

(1) 題意の曲線上の任意の点を  $(x, y)$  とすると，

$$|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a$$

両辺を平方して

$$2(x^2 + y^2 + c^2) - 2\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - (2cx)^2} = 4a^2$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - (2cx)^2} = (x^2 + y^2 + c^2) - 2a^2$$

再び両辺を平方して

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - (2cx)^2 = (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 4a^4$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \quad (\text{答})$$

(2)  $9x^2 - 4y^2 - 36x - 16y - 16 = 0$  を平方完成して整理すると

$$9(x-2)^2 - 4(y+2)^2 = 36$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1$$

ところで，双曲線  $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$  の焦点は  $(\pm\sqrt{13}, 0)$ ，漸近線は  $y = \pm\frac{3}{2}x$  であるから，求める焦点と漸近線はこれらを  $(2, -2)$  だけ平行移動して，

$$(2 \pm \sqrt{13}, -2), \quad y = \frac{3}{2}x - 5, \quad y = -\frac{3}{2}x + 1 \quad (\text{答})$$

4 確認：接線の方程式は微分法を用いれば求められるが、一般に 2 次曲線の問題は計算量が多いので、事前に公式として覚えておくべきである。

(1)は微分法で導くこともできるが、解答では多項式の学習も兼ねて重解条件で導くことにする。(2), (3)は結果も重要なので覚えておくこと。

解答：

(1)  $y^2 = (y - \beta + \beta)^2 = (y - \beta)^2 + 2\beta(y - \beta) + \beta^2$  に注意すると

$$y^2 = 4px \iff (y - \beta)^2 + 2\beta y - \beta^2 = 4px$$

と変形できる。この方程式と連立させて  $y = \beta$  (または  $x = \alpha$ ) が重解となる 1 次方程式が求める接線であるから、

$$2\beta y - \beta^2 = 4px \quad \therefore \beta y = 2px + \frac{1}{2}\beta^2$$

$\beta^2 = 4p\alpha$  を用いて

$$\beta y = 2p(x + \alpha) \quad (\text{おわり})$$

(2)  $P(\alpha, \beta)$  とおくと、P における接線の方程式は

$$\beta y = 2p(x + \alpha)$$

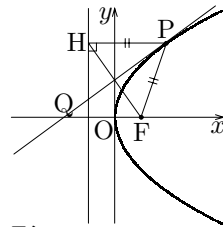
であり、 $H(-p, \beta)$  である。 $F(p, 0)$  であるから、

$$\beta \cdot \frac{\beta}{2} = \frac{4p\alpha}{2} = 2p(0 + \alpha)$$

となって、接線は FH の中点  $(0, \frac{\beta}{2})$  を通る。

放物線の定義より  $PF = PH$  であるから、二等辺三角形の性質より、P における接線は  $\angle FPH$  を二等分する。

(注) 接線と  $x$  軸の交点を Q とするとき  $\angle PQF = \angle QPH$  (錯角) であるから、 $PF = QF$  を示してもよい。



(3) 2 接線の交点を  $(x, y)$  とおく。直交する 2 接線はいずれも座標軸に平行でないことに注意して、点  $(x, y)$  を通る直線  $X = m(Y - y) + x$  が放物線  $Y^2 = 4pX$  に接する条件を求めると、 $Y$  の 2 次方程式

$$Y^2 - 4p\{m(Y - y) + x\} = 0$$

が重解をもつことより

$$\frac{1}{4}(\text{判別式}) = (2pm)^2 - 4p(my - x) = 0$$

$$\therefore pm^2 - ym + x = 0$$

これを  $m$  の 2 次方程式とみると、直交する 2 接線の傾きを 2 解とするから、解と係数の関係および直線の垂直条件より

$$(2 \text{ 接線の傾きの積}) = \frac{x}{p} = -1 \quad \therefore x = -p$$

よって、求める軌跡は

$$\text{準線 } x = -p \quad (\text{答})$$

5 確認：前問 4 と同じ主旨で、楕円の接線とその関連事項について確認する。

(1)は 6 のようにして重解条件から導くこともできるが、ここでは円の考察に帰着させる考え方の復習を兼ねて、数学Ⅱの円の接線の公式を利用することにする。(2)、(3)は結果も重要なので覚えておくこと。

解答：

(1) 点  $(\alpha, \beta)$  における  $E$  の接線上の任意の点を  $(x, y)$  とする。いま、座標平面上の点すべてを、原点を中心として  $x$  軸方向に  $\frac{1}{a}$  倍、 $y$  軸方向に  $\frac{1}{b}$  倍する相似変換を

すると、接点は  $(\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b})$  に、接線上の動点は  $(\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$  に移される。この相似変換

によって、楕円と直線が接するという関係は変わらないから、円の接線の公式より

$$\frac{\alpha}{a} \cdot \frac{x}{a} + \frac{\beta}{b} \cdot \frac{y}{b} = 1$$

の関係を満たす。これが求める方程式である。

(おわり)

(2)  $P(a\alpha, b\beta)$  ( $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ) とおくと、点  $P$  における楕円  $E$  の接線の方程式は

$$\frac{\alpha x}{a} + \frac{\beta y}{b} = 1 \quad \therefore b\alpha x + a\beta y = ab$$

$F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  とおくと、2点間の距離公式と楕円の公式および点と直線の距離公式を用いて

$$\begin{aligned} PF &= \sqrt{(a\alpha - c)^2 + (b\beta)^2} \\ &= \sqrt{a^2\alpha^2 - 2ac\alpha + c^2 + b^2(1 - \alpha^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 - b^2)\alpha^2 - 2ac\alpha + c^2 + b^2} \\ &= \sqrt{c^2\alpha^2 - 2ac\alpha + a^2} \\ &= |c\alpha - a| = |a - c\alpha| \end{aligned}$$

$$FH = \frac{|b\alpha \cdot c + a\beta \cdot 0 - ab|}{\sqrt{(b\alpha)^2 + (a\beta)^2}} = \frac{b|c\alpha - a|}{\sqrt{(b\alpha)^2 + (a\beta)^2}} = \frac{b|a - c\alpha|}{\sqrt{(b\alpha)^2 + (a\beta)^2}}$$

$F'$ ,  $H'$  についても同様に

$$PF' = |a + c\alpha|, \quad F'H = \frac{b|a + c\alpha|}{\sqrt{(b\alpha)^2 + (a\beta)^2}}$$

$$\therefore \frac{FH}{PF} = \frac{F'H}{PF'} = \frac{b}{\sqrt{(b\alpha)^2 + (a\beta)^2}}$$

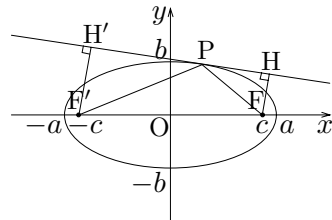
よって、三平方の定理または直角三角形の相似条件より

$$\triangle HPF \sim \triangle H'PF'$$

であるから、特に

$$\angle HPF = \angle H'PF'$$

(おわり)



(3)  $(a, b), (-a, b), (-a, -b), (a, -b)$  を除く交点を  $(x, y)$  として、接線の方程式を

$$Y = m(X - x) + y$$

とおく。楕円  $E$  の方程式  $b^2X^2 + a^2Y^2 - a^2b^2 = 0$  に代入して

$$b^2X^2 + a^2\{mX - (mx - y)\}^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\therefore (a^2m^2 + b^2)X^2 - 2a^2m(mx - y)X + a^2\{(mx - y)^2 - b^2\} = 0$$

接線となるための条件(重解条件)より

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\text{判別式}) &= a^4m^2(mx - y)^2 - a^2(a^2m^2 + b^2)\{(mx - y)^2 - b^2\} \\ &= a^4m^2b^2 - a^2b^2\{(mx - y)^2 - b^2\} \\ &= a^2b^2\{(a^2 - x^2)m^2 + 2xym + b^2 - y^2\} = 0 \end{aligned}$$

これを  $m$  の 2 次方程式とみるとき、直交する 2 接線の傾きを 2 解とするから、解と係数の関係および直線の垂直条件より

$$(2 \text{ 接線の傾きの積}) = \frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2} = -1$$

先に除外した 4 点とあわせて、求める軌跡は

$$\text{円 } x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{答})$$

(注)

1° 重解条件を用いて接線の方程式を導く場合、楕円は関数のグラフではないので、(大学で曲線論を学んでない限り)  $x, y$  の方程式としては重解をどうとらえるかが問題となる。そこで、6(1)のように、媒介変数表示により 1 変数化して考えるのがよい。

2° (2)と同値な命題として、「接線に関する  $F$  の対称点を  $Q$  とするとき 3 点  $F', P, Q$  は同一直線上にある」ことを示してもよい。むしろ、その方が計算の見通しは良いのだが、上の解答にある 2 次曲線独特の変形に慣れておくことが大切である。

3° (3)の円を楕円  $E$  の準円という。4(3)と比較せよ。

6 確認：4, 5と同じ主旨で、双曲線の接線とその関連事項について確認する。  
 (1)は基本解法演習「微分法」においても導かれているので、ここでは重解条件を用いることにする。(2), (3)は結果も重要なので覚えておくこと。

解答：

(1) 点  $(\alpha, \beta)$  における双曲線  $C$  の接線の方程式を

$$x = \alpha + mt, \quad y = \beta + nt, \quad (m, n) \neq (0, 0) \quad (t \text{ は媒介変数})$$

とおく。双曲線  $C$  の方程式に代入して

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha + mt)^2}{a^2} - \frac{(\beta + nt)^2}{b^2} - 1 &= 0 \\ \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{\alpha m}{a^2} - \frac{\beta n}{b^2}\right)t + \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1 &= 0 \\ \therefore \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{\alpha m}{a^2} - \frac{\beta n}{b^2}\right)t &= 0 \end{aligned}$$

$t = 0$  が重解であることより

$$\frac{\alpha m}{a^2} - \frac{\beta n}{b^2} = 0 \quad \therefore m : n = \frac{\beta}{b^2} : \frac{\alpha}{a^2}$$

よって、接線の方程式は  $(x - \alpha) : (y - \beta) = \frac{\beta}{b^2} : \frac{\alpha}{a^2}$  より

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{a^2}(x - \alpha) - \frac{\beta}{b^2}(y - \beta) &= 0 \\ \therefore \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} &= \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 1 \end{aligned}$$

(おわり)

(2)  $P(a\alpha, b\beta)$  ( $\alpha^2 - \beta^2 = 1$ ) とおくと、  
 点  $P$  における双曲線  $C$  の接線の方程式は

$$\frac{\alpha x}{a} - \frac{\beta y}{b} = 1$$

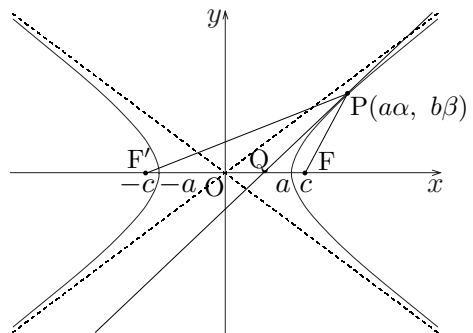
であり、 $x$  軸との交点  $Q$  は

$$Q\left(\frac{a}{\alpha}, 0\right)$$

$F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  とおくと、2点間の距離公式と双曲線の公式より

$$\begin{aligned} FP &= \sqrt{(a\alpha - c)^2 + (b\beta)^2} \\ &= \sqrt{a^2\alpha^2 - 2aca + c^2 + b^2(\alpha^2 - 1)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)\alpha^2 - 2aca + c^2 - b^2} \\ &= \sqrt{c^2\alpha^2 - 2aca + a^2} \\ &= |c\alpha - a| \end{aligned}$$

$|c\alpha| = c\sqrt{1 + \beta^2} > c > a$  に注意すると



$$|FP| = |a - c\alpha| = \begin{cases} c\alpha - a & (\alpha > 0) \\ a - c\alpha & (\alpha < 0) \end{cases}$$

同様にして

$$|F'P| = |a + c\alpha| = \begin{cases} a + c\alpha & (\alpha > 0) \\ -a - c\alpha & (\alpha < 0) \end{cases}$$

$\alpha > 0$  のとき,  $F'F$  を  $F'P : FP$  に内分する点の  $x$  座標は

$$x = \frac{(c\alpha - a)(-c) + (a + c\alpha)c}{(a + c\alpha) + (c\alpha - a)} = \frac{a}{\alpha}$$

$\alpha < 0$  のとき,  $F'F$  を  $F'P : FP$  に内分する点の  $x$  座標は

$$x = \frac{(a - c\alpha)(-c) + (-a - c\alpha)c}{(-a - c\alpha) + (a - c\alpha)} = \frac{a}{\alpha}$$

したがって, 直線  $PQ$  (点  $P$  における  $C$  の接線) は  $\angle F'PF$  の二等分線となり,

$$\angle FPQ = \angle F'PQ \quad (\text{おわり})$$

(3)  $P(a\alpha, b\beta)$  ( $\alpha^2 - \beta^2 = 1$ ) とおく。点  $P$  における双曲線  $C$  の接線

$$\frac{\alpha}{a}x - \frac{\beta}{b}y = 1 \quad \dots\dots (*)$$

と漸近線  $y = \frac{b}{a}x$  との交点を  $Q$ , 漸近線  $y = -\frac{b}{a}x$  との交点を  $R$  として一般性を失

わない。 $Q(at, bt)$  と表されるから, 接線の方程式(\*)に代入すると

$$\frac{\alpha}{a} \cdot at - \frac{\beta}{b} \cdot bt = (\alpha - \beta)t = 1$$

$\alpha^2 - \beta^2 = 1$  より

$$t = \alpha + \beta \quad \therefore Q(a(\alpha + \beta), b(\alpha + \beta))$$

同様にして

$$R(a(\alpha - \beta), -b(\alpha - \beta))$$

まず,  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) = \overrightarrow{OP}$  が確かめられて, 接点  $P$  は  $QR$  の中点である。

面積公式より,  $\triangle OQR$  の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |a(\alpha + \beta) \cdot (-b)(\alpha - \beta) - b(\alpha + \beta) \cdot a(\alpha - \beta)| \\ &= \frac{1}{2} |-2ab(\alpha^2 - \beta^2)| \\ &= ab|\alpha^2 - \beta^2| \\ &= ab \quad (\text{一定}) \end{aligned}$$

(注) (3)の結果は, 「座標軸を漸近線とする直角双曲線は反比例のグラフを表す」  
ことを一般化した内容である。反比例のグラフの場合に(3)を再確認せよ。

7 確認：一般に，2次曲線

$$C: ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2kx + 2ly + m = 0$$

と点  $P(\alpha, \beta)$  に対して，方程式

$$(a\alpha + b\beta + k)x + (b\alpha + c\beta + l)y + k\alpha + l\beta + m = 0$$

で表される直線を2次曲線  $C$  の点  $P$  に関する極線という。

点  $P$  が2次曲線  $C$  上にあるとき， $P$  における  $C$  の接線が極線となることを既に

4 ~ 6 で確かめた。点  $P$  が2次曲線  $C$  上にはない場合は，

点  $P$  から2本の接線が引けるときは，その2接点を通る直線

点  $P$  から接線が引けないときは，点  $Q$  に関する極線上に点  $P$

があるような点  $Q$  の軌跡(直線)

が点  $P$  に関する極線となる。

以上のことをそのまま試験場で用いるのは避けた方がよいが，極線の導き方がそのまま「軌跡」の特殊解法になっていることと，解答の見通しが立つことは見逃さない。

解答：

(1)  $P(a, b)$ ,  $Q(c, d)$  とすると， $P$ ,  $Q$  における接線の方程式はそれぞれ

$$by = 2p(x + a), \quad dy = 2p(x + c)$$

$$\therefore -2ap + by = 2px, \quad -2pc + dy = 2px$$

交点を  $(x, y)$  とおくと，この2式を同時に満たすから， $XY$  平面において

$$\text{直線 } PQ \text{ の方程式は } -2pX + yY = 2px$$

であるとわかる。焦点を通ることより  $(X, Y) = (p, 0)$  を代入して成り立つから

$$-2p \times p + y \times 0 = 2px \quad \therefore x = -p$$

よって，求める軌跡は

$$\text{準線 } x = -p \quad (\text{答})$$

(2)  $B(\alpha, \beta)$ ,  $C(\gamma, \delta)$  とおくと， $B$ ,  $C$  における  $E$  の接線の方程式はそれぞれ

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 1, \quad \frac{\gamma x}{a^2} + \frac{\delta y}{b^2} = 1$$

どちらも点  $A(x_0, y_0)$  を通るから，

$$\frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2} = 1, \quad \frac{\gamma x_0}{a^2} + \frac{\delta y_0}{b^2} = 1$$

よって，直線  $BC$  の方程式は

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

$P(p, q)$  とおくと，同様にして直線  $QR$  の方程式は

$$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$$

となる。点  $P$  は直線  $BC$  上にあるから

$$\frac{x_0 p}{a^2} + \frac{y_0 q}{b^2} = 1$$

が成り立つが，これは同時に点  $A$  が直線  $QR$  上にあることを意味する。(おわり)

8 確認：平面上の曲線  $C$  が 1 つの変数  $t$  を用いて

$$C: x = f(t), y = g(t)$$

と表されるとき，この式表示を媒介変数表示といい，変数  $t$  を媒介変数という。媒介変数表示すると曲線上の動点の追跡が容易となり，一般には  $x, y$  の方程式で表すより考えやすくなる。しかし， $x, y$  の方程式で与えられた曲線が つねに媒介変数表示できるとは限らないので，いくつかの具体例を覚えておく必要がある。

楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  は  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  とみることができるので

$$x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$$

と表示できる。円周上の点と楕円周上の点との対応は，問題 (1) の中で確認する。

公式  $\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  と下図の図形的対応により，双曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  は

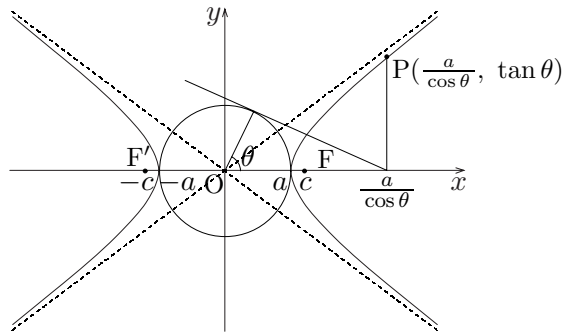
$$x = \frac{a}{\cos \theta}, y = b \tan \theta$$

と媒介変数表示される。また，展開公式  $(p+q)^2 - (p-q)^2 = 4pq$  から

$$x = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right), y = \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)$$

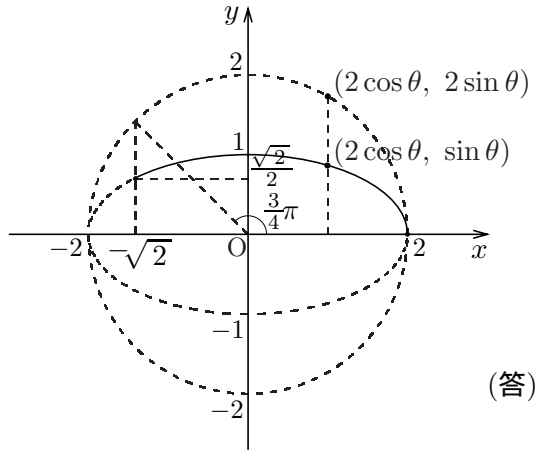
と表すこともできる。

この例からもわかるように，媒介変数表示は一通りとは限らない。



解答：

- (1)  $0 \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$  において，点  $(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$  と  $(2 \cos \theta, \sin \theta)$  の対応に注意して点  $(2 \cos \theta, \sin \theta)$  の軌跡を図示すると



(答)

- (2)  $P\left(\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right)$  ( $t \neq 0$ ) と表されるから，点と直線の距離公式と相加・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned} PH &= \frac{\left| 2 \times \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left| t + \frac{3}{t} \right| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left( |t| + \left| \frac{3}{t} \right| \right) \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{|t| \cdot \left| \frac{3}{t} \right|} = \sqrt{\frac{3}{5}} \end{aligned}$$

ここで，不等式の等号は

$$|t| = \left| \frac{3}{t} \right| \quad \text{すなわち} \quad t = \pm\sqrt{3}$$

のとき成り立つから，

$$PH \text{ の最小値は } \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \quad (\text{答})$$

(注)

1° 対称性を考慮して， $t > 0$  の範囲だけ考えれば十分である。

2°  $P\left(\frac{1}{\cos \theta}, \tan \theta\right)$  ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) において，

$$PH = \dots = \frac{2 - \sin \theta}{\sqrt{5} \cos \theta}$$

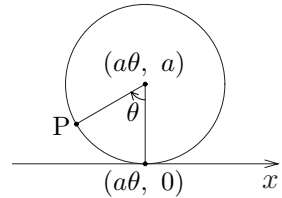
を  $\theta$  で微分して最小値を求めてもよい。

9 確認：本問では，サイクロイドとアステロイドについて復習する。この2つは予備知識として知っておくことが望ましいが，下の解答では一般の曲線に対処できるような解法で述べておく。媒介変数表示のポイントは，ベクトルの和に分割して考えることであった。

解答：

(1)  $x$  軸に接しながら回転する円の中心を  $Q(a\theta, a)$  とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP} &= \left( a \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right), a \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \right) \\ &= \left( -a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), -a \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right) \\ &= (-a \sin \theta, -a \cos \theta)\end{aligned}$$



$P(x, y)$  とおくと， $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$  より

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta) \quad (\text{答})$$

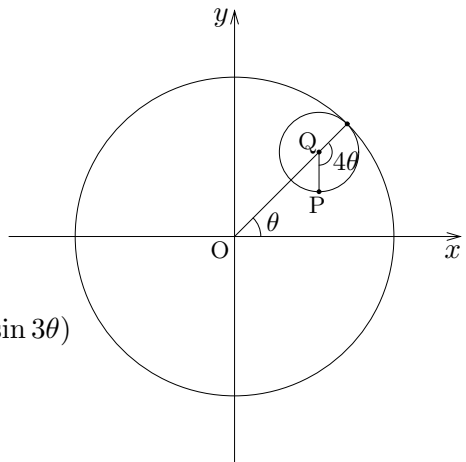
(2) 2 円の接点を  $(a \cos \theta, a \sin \theta)$  とおき，内接円の中心を  $Q$  とすると

$$\begin{aligned}Q &\left( \frac{3}{4}a \cos \theta, \frac{3}{4}a \sin \theta \right) \\ \overrightarrow{QP} &= \frac{a}{4}(\cos(\theta - 4\theta), \sin(\theta - 4\theta)) \\ &= \frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta)\end{aligned}$$

であるから，3 倍角の公式を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} \\ &= \frac{a}{4}(3 \cos \theta + \cos 3\theta, 3 \sin \theta - \sin 3\theta) \\ &= \frac{a}{4}(4 \cos^3 \theta, 4 \sin^3 \theta) \\ &= (a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)\end{aligned}$$

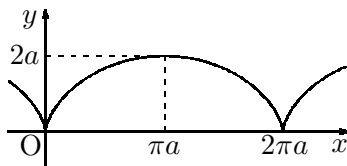
$$\therefore x = a \cos^3 \theta, \quad y = a \sin^3 \theta \quad (\text{答})$$



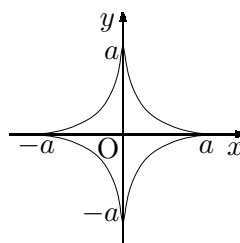
後半の接線の性質の証明は，数学 III の範囲の基本問題なので，省略する。

(注) (1), (2)の曲線はそれぞれ次のようになる。

(1) サイクロイド



(2) アステロイド



10 確認：基準となる点  $O$  からの距離が  $r$  であり， $O$  を端点とする半直線  $OX$  から測った偏角  $\theta$  である点  $P$  の位置を座標  $(r, \theta)$  で表すとき， $(r, \theta)$  を点  $P$  の極座標という。このとき， $O$  を極，半直線  $OX$  を始線という。

図形の方程式を極座標の変数  $r, \theta$  の関係式で表したものを極方程式という。極方程式を論じるには，下の解答のように直角三角形に注目することと余弦定理の利用がポイントとなるが，いざとなれば

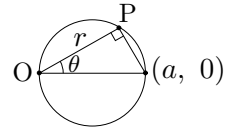
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

により強引な計算で答を出してもよい。むしろ，(12のような)極座標で表示することを解法の本質とする問題の演習の方が重要である。

解答：

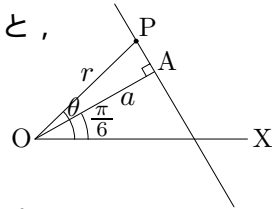
(1) 題意の円は，極と点  $(a, 0)$  を直径の両端とする円であるから，その極方程式は

$$r = a \cos \theta \quad (\text{答})$$



(2) 直線上の動点  $P$  に対して直角三角形  $OAP$  に注目すると，求める直線の極方程式は

$$r \cos \left( \theta - \frac{\pi}{6} \right) = a \quad (\text{答})$$



(3)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x > 0$  上の点を  $P$  とし， $F'(-ae, 0)$  とする。

$0 < \theta < 2\pi$  とするとき

$$\angle F'FP = \pm(\pi - \theta), \quad \cos \angle F'FP = -\cos \theta$$

であることに注意して， $\triangle F'FP$  に余弦定理をあてはめると

$$(r + 2a)^2 = (2ae)^2 + r^2 - 2 \times 2ae \times r \times (-\cos \theta)$$

$$4ar + 4a^2 = 4a^2e^2 + 4aer \cos \theta$$

$$4ar(1 - e \cos \theta) = 4a^2(e^2 - 1)$$

$$\therefore r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 - e \cos \theta} \quad (\text{答})$$

(注)  $F$  を極にとるとき， $x < 0$  の部分は偏角に制限ができて扱いにくい。そこで， $x < 0$  の部分を考える場合は， $F'$  を極とする極方程式を用いる方が実用的である。ちなみに，本問における正の定数  $e$  は，次の11で扱う離心率である。

11 確認：2次曲線は 1 ~ 3 の定義のほかに

- (i) 2次方程式で表される平面曲線
- (ii) 円錐面の切り口に現れる曲線
- (iii) 平面上で定点と定直線からの距離の比が一定である点の軌跡

とも定義できる。(ii)を根拠として、2次曲線は円錐曲線ともいう。本問では、(iii)について確認する。

定直線  $\ell$  上にない定点を  $F$  とし、曲線上の動点  $P$  から定直線  $\ell$  におろした垂線の足を  $H$  とする。 $e$  を正の定数とすると、

$$\frac{PF}{PH} = e$$

を満たす点  $P$  の軌跡は2次曲線となる。 $e = 1$  のときは 1 での放物線の定義と同じであり、本問(1)とあわせると

$0 < e < 1$  のとき楕円、 $e = 1$  のとき放物線、 $e > 1$  のとき双曲線である。この定数  $e$  を離心率という。

2次曲線の焦点を極にとるとき、2次曲線の極方程式は

$$r = \frac{k}{1 \pm e \cos \theta}$$

の形となり、 $\cos \theta$  の係数に離心率が現れる。

解答：

(1)  $PF = ePH$  より

$$\sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = e \left| x - \frac{a}{e} \right|$$

$$(x - ae)^2 + y^2 = (ex - a)^2$$

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

$e$  は1でない正の定数であるから、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

よって、

$$\left. \begin{array}{l} e < 1 \text{ のとき 焦点 } (\pm ae, 0), \text{ 長軸の長さ } 2a \text{ の楕円} \\ e > 1 \text{ のとき 焦点 } (\pm ae, 0), \text{ 頂点 } (\pm a, 0) \text{ の双曲線} \end{array} \right\} \text{ (答)}$$

(2)  $\vec{PH}$  は始線とは逆向きであることに注意すると

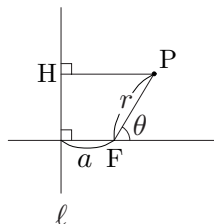
$$PH = a + r \cos \theta$$

であり、 $PF = r = ePH$  より

$$r = e(a + r \cos \theta)$$

よって、求める曲線の極方程式は

$$r = \frac{ea}{1 - e \cos \theta} \quad \text{(答)}$$



12 確認：2次曲線の問題は，図形問題であるにもかかわらず，ある程度の計算は覚悟しなければならない。しかし，本問のように

- (1) 距離の逆数を考える
- (2) ある点を中心とする回転角を考える

という場合には，[1] ~ [6] のような強引な計算ではとても処理し切れない。そこで，このような場合は極座標表示で処理するとうまく行くことが多い。と言っても

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

により  $r$  と  $\theta$  の式に書き直すだけのことではあるが …。

解答：

(1) 楕円の方程式を  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$  ( $a > c > 0$ ) とし， $F(c, 0)$  とし一般性を失わない。 $P(c + r \cos \theta, r \sin \theta)$ ， $F'(-c, 0)$  とおくと，

$$F'P = 2a - r$$

であることに注意して， $\triangle FPF'$  に余弦定理をあてはめると

$$(2a - r)^2 = r^2 + (2c)^2 - 2 \cdot r \cdot 2c \cdot \cos(\pi - \theta)$$

$$4a^2 - 4ar = 4c^2 + 4cr \cos \theta$$

$$\therefore \frac{1}{FP} = \frac{1}{r} = \frac{a + c \cos \theta}{a^2 - c^2}$$

$\theta \mapsto \theta + \pi$  とすることで

$$\frac{1}{FQ} = \frac{a - c \cos \theta}{a^2 - c^2}$$

であるから，

$$\frac{1}{FP} + \frac{1}{FQ} = \frac{2a}{a^2 - c^2} \quad (\text{一定}) \quad (\text{おわり})$$

(2) 原点を  $O$ ，ひし形の4頂点を反時計回りの順に  $P, Q, R, S$  とすると，単位円に外接するための条件は， $\triangle OPQ$  の面積を2通りに表すことにより

$$\frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot PQ$$

$$\therefore OP \cdot OQ = PQ = \sqrt{OP^2 + OQ^2} \quad (\because OP \perp OQ)$$

$P(p \cos \theta, p \sin \theta)$ ， $Q\left(q \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), q \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$  とおくと，楕円の式より

$$\frac{(p \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{(p \sin \theta)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(-q \sin \theta)^2}{a^2} + \frac{(q \cos \theta)^2}{b^2} = 1$$

であるから， $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  より

$$(\text{題意の条件}) \iff pq = \sqrt{p^2 + q^2} \iff \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = 1$$

$$\iff \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \quad (\text{答})$$