$\boxed{1}$ **（関数の極限と不定形）**

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$ 　(n は自然数)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+4}{2x^3+3x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^3-3x)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

$\boxed{2}$ **（三角関数の極限）**

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ を導け。

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$ 　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$ 　　(iii) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$\boxed{3}$ **（指数・対数の極限）**

$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ (数列の極限) を既知として，次の各公式を導け。

(1) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ （関数の極限）

(2) $\lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$

(3) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\log(1 + h)}{h} = 1$

(4) $\lim_{h \to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x$

(5) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\log|x + h| - \log|x|}{h} = \dfrac{1}{x}$

$\boxed{4}$ **（微分可能，導関数の定義）**

(1) 関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分不可能であることを示せ。

(2) 関数 $g(x) = x|x|$ は $x = 0$ で微分可能か。

(3) 導関数の定義に従って $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x}$ を求めよ。

$\boxed{5}$ **（積の微分法，商の微分法）**

(1) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

が成り立つことを示せ。

(2) 次の関数を微分せよ。

(i) $y = (x+1)^3(x-3)^2$

(ii) $y = e^x \sin x$

(iii) $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

(iv) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

$\boxed{6}$ **（合成関数の微分法）**

(1) $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ であることを示せ。

(2) 次の関数を微分せよ。

(i) $y = \cos 2x$

(ii) $y = e^{x^2+x}$

(iii) $y = \sqrt{1-x^2}$

(iv) $y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(v) $y = x^{\frac{1}{x}}$　$(x > 0)$

$\boxed{7}$ **（陰関数の微分法，逆関数の微分法）**

(1)　曲線 $x^3 - xy + y^3 = 1$ 上の点 $(1,\ 1)$ における接線の傾き $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(2)　$x = \tan y \left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を x で表せ。

$\boxed{8}$ **（媒介変数表示関数の微分法）**

$\begin{cases} x = (1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = (1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

$\boxed{9}$ **（接線と法線，接する２曲線）**

(1)　曲線 $y=\dfrac{\log x}{x}$ に原点から引いた接線の方程式を求めよ。また，その接点における法線の方程式を求めよ。

(2)　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 上の点 $(\alpha,\ \beta)$ における接線の方程式が $\dfrac{\alpha x}{a^2}-\dfrac{\beta y}{b^2}=-1$ であることを示せ。

(3)　放物線 $y=ax^2$ と曲線 $y=\log x$ が接するとき，a の値と接点の座標を求めよ。

$\boxed{10}$ **（平均値の定理）**

(1)　関数 $f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続，$a<x<b$ で微分可能であり，$f(a)=f(b)$ が成り立つとする。このとき $f'(c)=0$，$a<c<b$ を満たす c が存在すること(ロルの定理)を証明せよ。ただし，閉区間において連続関数が最大値，最小値をとることは既知としてよい。

(2)　関数 $f(x)=\sqrt[3]{x+3}+3$ について，$x>5$ のとき

$$0<f(x)-5<\frac{1}{12}(x-5)$$

が成り立つことを示せ。

(3)　$a_1=6$，$a_{n+1}=\sqrt[3]{a_n+3}+3$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{11}$ **（極大・極小）**

(1)　関数 $f(x)$ は閉区間 $[\,a,\ b\,]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとする。開区間 $(a,\ b)$ でつねに $f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は閉区間 $[\,a,\ b\,]$ で単調に増加することを示せ。

(2)　関数 $f(x) = \dfrac{x - e^{x-1}}{1 + e^x}$ はただ一つの極値をもち，それが極大値であることを示せ。

$\boxed{12}$ **（不等式への応用，極限公式）**

(1)　$x > 0$ のとき，$\log x < \sqrt{x}$ であることを証明せよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0,\ \lim_{x\to+0} x\log x = 0$ をそれぞれ示せ。

(3)　$x > 0$ のとき，$(x+2)e^{-x} + x - 2 > 0$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{13}$ **（漸近線）**

(1)　直線 $y = ax + b$ が曲線 $y = \sqrt{4x^2 + 12x + 1}$ の漸近線となるように定数 $a,\ b$ を定めよ。

(2)　曲線 $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$ の漸近線を求めよ。

$\boxed{14}$ **（曲線の凹凸）**

(1)　関数 $f(x)$ は閉区間 $[\,a,\ b\,]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で 2 回微分可能であるとする。開区間 $(a,\ b)$ でつねに $f''(x) > 0$ ならば $f(x)$ は閉区間 $[\,a,\ b\,]$ で下に凸であることを示せ。

(2)　曲線 $y = \dfrac{\log x}{x}$ の凹凸を調べ，変曲点の座標を求めよ。

$\boxed{15}$ **（関数のグラフの図示）**

増減，極値，凹凸，変曲点，漸近線を調べ，曲線 $y = \dfrac{1 + x - x^3}{x^2}$ の概形をえがけ。

$\boxed{16}$ **（媒介変数表示曲線の図示）**

原点 O を中心とする半径 1 の円に糸がまきつけられていて，糸の端は点 A$(1,\ 0)$ にあり，反時計回りにほどくことができる。糸をたわむことなくほどいていくとき，糸の端の点を P$(x,\ y)$，その糸と円の接点を T とし，動径 OT が OA から回転した角度を θ とする。$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で変化するとき，点 P がえがく曲線を C とする。

(1)　$x,\ y$ を θ の式で表せ。

(2)　曲線 C を図示せよ。

$\boxed{17}$ **（方程式への応用）**

(1)　方程式 $xe^{-x} = 2 - x^2$ は正の実数解をただ 1 つもつことを証明せよ。

(2)　曲線 $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ に点 $(0,\ a)$ から引いた接線の本数を求めよ。

$\boxed{18}$ **（図形量の最大・最小）**

等脚台形 ABCD が AD∥BC，　CD = DA = AB = 1 を満たすとき，面積 S の最大値を求めよ。

$\boxed{1}$ **確認**：変数xが定数aと異なる値をとりながらaに限りなく近づくとき，関数$f(x)$の値が一定値Aに限りなく近づくならば，$x \to a$のとき$f(x)$はAに**収束する**といい，$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = A$と表す。収束しないときは**発散する**という。

xが正の値をとって限りなく大きくなるとき$x \to \infty$と表し，xが負の値をとって絶対値が限りなく大きくなるとき$x \to -\infty$と表す。∞は単なる記号であって，数値ではない。$x \to \infty$のとき関数$f(x)$が定数Aに収束するならば，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = A$と表す。$f(x) \to \infty$の場合や$x \to -\infty$の場合も同様である。$f(x) \to \infty$ $\bigl(f(x) \to -\infty\bigr)$のときは，特に正の無限大に(負の無限大に)発散するという。

実際に極限を求める際には，**不定形の型を見極めることが重要**である。不定形とは，そのままでは収束・発散が判断できないような式の形のことである。不定形には大きく5つの型があり，その型ごとに処理の仕方が決まってくる；

$\dfrac{0}{0}$　：　(1)のようなタイプで，分母・分子を共通因数で割ることが基本。
公式 $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$，$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$を利用するのもこのタイプ。

$\dfrac{\infty}{\infty}$　：　(2)のようなタイプで，分母・分子を同次のべきで割ることが基本。
公式 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$を利用するのもこのタイプ。

$0 \times \infty$　：　$\displaystyle\lim_{x \to +0} x\log x = 0$が適用できるものを除くと，数学IIの公式を用いて他の不定形に帰着させることになる。$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$のような極限も($\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sin x \fallingdotseq \infty$ではあるが)便宜上この型に分類される。

$\infty - \infty$　：　一般論は存在しないが，受験対策としては(3), (4)のタイプだけ注意すればよい。(3)は追い出し法を用いるか，発散因子でくくる。(4)は分子の有理化をして$\frac{\infty}{\infty}$に帰着させる。

1^∞　：　自然対数の底の定義$e = \displaystyle\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($\to \boxed{3}$)と結びつける。

不定形を解消したあとは，収束する極限の性質を用いる。

$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = A$，$\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = B\,(\neq 0)$のとき，

$$\lim_{x \to a}\{f(x) + g(x)\} = A + B, \quad \lim_{x \to a} kf(x) = kA \quad (k\text{は実数定数})$$

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB, \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

が成り立ち，$x \to \infty$の極限に対しても同様の定理が成り立つが，高校数学の範囲ではこれらの定理が証明できないので，結果を認めて用いることにしている。

以上のような**小手先の変形で処理できない場合は**，適当な関数で評価して**ハサミウチの原理**(or **追い出しの原理**)**に持ち込む**ことになるが，入試ではヒントがつくことも多い。なお，「極限を求めよ」という表現には，**「収束・発散を論じよ」という意味も含まれている**ことに注意。

解答：

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}\{(x+h)^{n-1}+x(x+h)^{n-2}+x^2(x+h)^{n-3}+\cdots+x^{n-1}\}$$
$$= \lim_{h\to 0}\{(x+h)^{n-1}+x(x+h)^{n-2}+x^2(x+h)^{n-3}+\cdots+x^{n-1}\}$$
$$= nx^{n-1} \quad \text{(答)}$$

（注）この計算結果は，$\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ であることを表している。(→ $\boxed{4}$)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+4}{2x^3+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}}{2+\dfrac{3}{x^2}} = \frac{1}{2}$ (答)

(3) $x>2$ のとき ($x^3>4x$ より) $x^3-3x>x$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x=\infty$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}(x^3-3x)=\infty \quad \text{(答)}$$

（注）1° “$=\infty$” はあくまでも記号であり，「答が ∞」というわけではない。
答としては，「正の無限大に発散する」とする方が望ましい。
2° (大問の)解答の途中に現れる式であれば，

$$\lim_{x\to\infty}(x^3-3x)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)=\infty$$

程度で済ませてもよいだろう。

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}$$
$$= \frac{1}{2} \quad \text{(答)}$$

$\boxed{2}$ **確認**：$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$ のような異質な関数の比で表される不定形は，小手先の変形では解消できないので，(図形を考えるなどして)うまい評価式を見つけてハサミウチの原理に持ち込む。ここでは，三角形と扇形の面積に注目する。(1)の結果と $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$ は公式として覚えておき，三角関数が絡む $\dfrac{0}{0}$ の不定形の解消に今後役立てる。

(2)(iii) の結果は

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$$

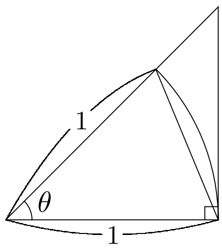
であることを表すが，同様にして

$$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x,\quad \frac{d}{dx}\tan x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

も導けるので，計算練習を兼ねて確かめておいてほしい。

解答：

(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，右図において面積を比較すると



$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\theta<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta$$

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore\quad \cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$$

ハサミウチの原理より

$$\lim_{\theta\to +0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

$\theta<0$ の場合は，負角の公式より $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ であるから，

$$\lim_{\theta\to -0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to +0}\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}=\lim_{\theta\to +0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

以上より

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

(おわり)

(2) (i)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$　(答)

(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\frac{3^2}{1+\cos 3x}=\frac{9}{2}$　(答)

(iii)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$

$=\cos x$　(答)

$\boxed{3}$ **確認**：高校数学の範囲では証明できないが，数列の極限 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は収束する。この極限値を通常 e で表し，この e を底とする対数を**自然対数**と呼ぶことから，e を**自然対数の底**という。(ネイピア定数と呼ぶ人もいるが，正式名称ではない。)
もともとは

$$\frac{d}{dx}e^x=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\quad\text{すなわち}\quad\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

となるような定数の必要性から生まれたが，それならなぜこれを定義としないのかと言えば，実際にこのような数が存在するかどうかが，これではわからないからである。

そこで，$\dfrac{e^h-1}{h}=t$ とおいて $\lim_{h\to 0}t=1$ と同値な条件を導いてみると，

$$\frac{e^h-1}{h}=t \iff e^h=1+ht \iff e=\left\{(1+ht)^{\frac{1}{ht}}\right\}^t$$

これより $e=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ が定義の候補に挙がるが，これでは収束を示すのが難しいので，扱いやすい数列の極限値を定義としているわけである。

極限の収束にも簡単に触れておこう。大学でもう一度勉強し直すことになるので，読んでなるほどと思う程度にとどめておいてよい。二項定理より

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=1+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{n}+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+{}_n\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{n}\right)^n\\&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\\&\qquad\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$

であるから $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は単調増加数列であり，

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&<2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=2+1-\frac{1}{n}<3\end{aligned}$$

より上に有界であるから，大学の一般教養の定理より収束が示される。

数列の極限と関数の極限は何となく似ているが，

$$\lim_{n\to\infty}\sin\pi n=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\pi x\ \text{は極限値なし}$$

のように，離散変数と連続変数の違いがあることに注意する。(1)では，十分大きな任意の実数 x に対して $n\leqq x<n+1$ を満たす自然数 n があることに注目して，ハサミウチの原理を用いる。あとは前問の結果を利用して行けばよい。

(2)　直接の目標は $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ を示すことである。

(3)　$\log(1+h)$ は $\log_e(1+h)$ のことである。

(4)　$y=\log x \iff x=e^y$ の関係に注目する。

(5)　h は 0 の十分近くと考えれば，絶対値をはずすことができる。

解答：

(1)　任意の 2 以上の実数 x に対して，$n \leqq x < n+1$ を満たす自然数 n が存在して

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{n}$$

$$\therefore\ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ここで，$n \to \infty \iff x \to \infty$ であり，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

(おわり)

(2)　$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}$$
$$= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$
$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e$$

であるから，$x = \dfrac{1}{h}$ と置き換えることにより，(1)とあわせて

$$\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

(おわり)

(3)　$$\lim_{h\to0}\frac{\log(1+h)}{h} = \lim_{h\to0}\log(1+h)^{\frac{1}{h}} = \log e = 1$$

(おわり)

(4)　$e^h - 1 = t$ とおくと，$h = \log(1+t)$，$h \to 0 \iff t \to 0$ であるから，(3)より

$$\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h} = e^x\lim_{t\to0}\frac{t}{\log(1+t)} = e^x$$

(おわり)

(5)　$|h|$ が十分小さい正の数であるとき，0 でない任意の実数 x に対して x と $x+h$ は同符号となるから，特に $\dfrac{x+h}{x} > 0$ であり，

$$\lim_{h\to0}\frac{\log|x+h|-\log|x|}{h} = \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\log\left|\frac{x+h}{x}\right|$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x}$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\log\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}} = \frac{1}{x}$$

(おわり)

$\boxed{4}$ **確認**：関数 $f(x)$ の定義域内の a における極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するとき，$f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるといい，その極限値を $x=a$ における**微分係数**という。$f(x)$ の $x=a$ における微分係数は $f'(a)$ で表す。

関数 $f(x)$ が区間 I で微分可能であるとき，区間 I における実数 x に対してその微分係数 $f'(x)$ を対応させてできる関数を $f(x)$ の**導関数**といい，導関数を求めることを**微分する**という。導関数は $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{df}{dx}(x)$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ などと表すが，微分変数の混乱の恐れがないときは略して y'，$f'(x)$ などと表す。物理学などでは，$\dot{y}$，$\dot{f}(x)$ と表すこともある。ちなみに，記号 $\dfrac{d}{dx}$ はライプニッツの考案である。

実際に微分する際には，あらかじめ基本関数についての極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ の結果といくつかの公式を覚えておいて，その組合せで計算する。ただ，導関数の公式の導出が極めて良質な極限の計算練習であることと，つねに実感を高めておく必要性から，時間を見つけて公式の証明はしておく方がよい。

解答：

(1) $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\dfrac{-x}{x}=-1 & (x<0)\\[2mm] \dfrac{x}{x}=1 & (x>0)\end{cases}$$ より

$$\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1,\quad \lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$$

であるから，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ は収束せず，$f(x)$ は $x=0$ で微分不可能である。

(おわり)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x|x|}{x}=\lim_{x\to 0}|x|=0$ (収束) であるから，

$g(x)$ は $x=0$ で微分可能　(答)

(3) $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(注) べき関数の微分の公式 $\dfrac{d}{dx}x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}$ $(\to \boxed{6})$ はあるが，$\dfrac{d}{dx}\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ は別に覚えておく方がよい。

$\boxed{5}$ **確認**：既に，基本関数の導関数については(べき関数を除いて)確認済みである。

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n\text{は自然数}) \ \rightarrow \boxed{1}(1)$$
$$(\sin x)' = \cos x,\quad (\cos x)' = -\sin x,\quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \boxed{2}$$
$$(e^x)' = e^x,\quad (\log x)' = \frac{1}{x} \ \rightarrow \boxed{3}(4)(5)$$
$$\left(\sqrt{x}\,\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

より一般の関数を微分するには，これらを組み合わせる公式が必要である。(1)では導関数の定義にもとづいて積の導関数と商の導関数を導き，(2)では実際の関数で公式の適用を実感する。そのどちらも学習として不可欠である。

解答：

(1)
$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$
$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$
$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

(おわり)

(2) (ｉ)
$$\{(x+1)^3(x-3)^2\}' = 3(x+1)^2(x-3)^2 + (x+1)^3\cdot 2(x-3)$$
$$= (x+1)^2(x-3)\{3(x-3)+2(x+1)\}$$
$$= (x+1)^2(x-3)(5x-7) \quad (\text{答})$$

(ii) $(e^x\sin x)' = (e^x)'\sin x + e^x(\sin x)' = e^x(\sin x + \cos x)$　(答)

(iii)
$$\left(\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\right)' = \frac{\cos x(\sin x+\cos x) - \sin x(\cos x - \sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2} \quad (\text{答})$$

(iv) $y = \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$ を微分して　$y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$　(答)

(注) $\boxed{6}$で確認する $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ を用いて，$y' = -2(x-1)^{-2}$ としてもよい。

$\boxed{6}$ **確認**：合成関数の微分の公式を，高校の教科書のように

$$y=f(u),\ u=g(x)\text{ のとき }\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

とごまかしてしまうと，実際の計算では役立たなくなってしまう。大切なのは

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))g'(x)}$$

の形をしっかり叩き込み，どんな場面でもこの形を見抜けるようにすることである。

合成関数の微分の特別な形として，次の 2 つの公式は極めて有用である。

$$\frac{d}{dx}f(ax+b)=af'(ax+b)$$

$$\frac{d}{dx}\log f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\quad(\textbf{対数微分法})$$

対数微分法は，対数を用いて乗法的表現を加法的表現に帰着させて議論する場面で，効果を発揮する。また，対数微分法を用いることにより，べき関数の導関数の公式

$$\boldsymbol{(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}}$$

が導かれる。$y=x^{\alpha}$ $(x>0)$ の両辺自然対数をとって，

$$\log y=\alpha\log x$$

の両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{\alpha}{x}\qquad\therefore\ y'=\frac{\alpha}{x}y=\alpha x^{\alpha-1}$$

(2)(v)も基本関数の(単純な)組合せではないので，これと同じ考え方をする。

解答：

(1)
$$\frac{d}{dx}f(g(x))=\lim_{h\to0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$=f'(g(x))g'(x)$$
(おわり)

(2) (i) $(\cos 2x)'=2(-\sin 2x)=-2\sin 2x$　(答)

(ii) $\left(e^{x^2+x}\right)'=e^{x^2+x}(x^2+x)'=e^{x^2+x}(2x+1)$　(答)

(iii) $\left(\sqrt{1-x^2}\,\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(1-x^2\right)'=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$　(答)

(iv) $y'=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\,\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1+\dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　(答)

(v) $\log y=x^{-1}\log x$ の両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y}=-x^{-2}\log x+x^{-1}x^{-1}$$

$$\therefore\ y'=yx^{-2}(1-\log x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)\quad(\text{答})$$

$\boxed{7}$ **確認**：曲線 $F(x,\ y)=0$ を適当な領域 D に制限すると関数 $y=f(x)$ のグラフとみなせるとき，この関数 $f(x)$ を曲線 $F(x,\ y)=0$ の D における**陰関数**という。例えば，単位円 $x^2+y^2=1$ を第 1 象限に限定すると，関数 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(0<x<1)$ のグラフとなるので，関数 $y=\sqrt{1-x^2}$ は円 $x^2+y^2=1$ の陰関数である。

一般に，陰関数そのものを微分するのは計算が煩わしくなることが多く，また陰関数の具体的な式が求められないことも多い。そこで，陰関数の導関数を求めるには，もとの**曲線の式 $\boldsymbol{F(x,\ y)=0}$ の両辺を合成関数の微分法を用いてそのまま $\boldsymbol{x}$ で微分する**とよい。上の単位円の例でも，$\dfrac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}$ を計算するより，$x^2+y^2=1$ の両辺を x で微分して $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$ とする方が楽である。

関数 $y=f(x)$ が逆関数 $x=g(y)$ をもつとき，

$f(x)$ が連続ならば $g(y)$ も連続,

$f(x)$ が微分可能ならば $g(y)$ も微分可能

ある。ただし，高校の範囲では(厳密には)証明できないので，(証明なしに)認めて用いることになっている。(もちろん，大学ではきちんと証明する。)

微分可能性を認めるならば，$g(f(x))=x$ に合成関数の微分法を適用して

$$g'(f(x))f'(x)=1 \qquad \therefore\ f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$$

$y=f(x)$ として，象徴的に表現すると，

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}}$$

となる。図形的には微分係数は接線の傾きを表し，逆関数では x と y の役割が逆になるので，傾きの分母と分子が逆になると直観的には考えられる。

解答：

(1) 点 $(1,\ 1)$ の近傍において y を x の関数とみなして，$x^3-xy+y^3=1$ の両辺を x で微分すると

$$3x^2-y-x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y}{x-3y^2}$$

$(x,\ y)=(1,\ 1)$ を代入して

$$\frac{dy}{dx}=-1 \quad (答)$$

(2) $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\cos^2 y=\frac{1}{\tan^2 y+1}=\frac{1}{x^2+1} \quad (答)$$

$\boxed{8}$ **確認**：関数 $y=f(x)$ のグラフにおいて

$f'(a)$ は点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きを表す

と考えたように，媒介変数表示曲線 $x=f(t),\ y=g(t)$ においてベクトル $(f'(t),\ g'(t))$ を考えると，

ベクトル $(f'(t),\ g'(t))$ は動点 $(f(t),\ g(t))$ が動こうとする向きを表す

ことになる。特に，$(f'(t),\ g'(t))$ は接(線の方向)ベクトルであるから，
$x'(t)\neq 0$ のとき

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

導関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき $f(x)$ は **2 回微分可能**であるといい，$f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の**第 2 次導関数**という。第 2 次導関数は，記号では y''，$f''(x)$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ などで表す。一般の自然数 n に対して，**n 回微分可能**や**第 n 次導関数**も同様に定義し，$y^{(n)}$，$f^{(n)}(x)$，$\dfrac{d^ny}{dx^n}$ などで表す。

解答：

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)=-\sin 2\theta-\sin\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta}=-\sin\theta\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=\cos 2\theta+\cos\theta$$

であるから，公式より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=-\frac{\cos 2\theta+\cos\theta}{\sin 2\theta+\sin\theta}\quad\text{(答)}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\\&=-\frac{(-2\sin 2\theta-\sin\theta)(\sin 2\theta+\sin\theta)-(\cos 2\theta+\cos\theta)(2\cos 2\theta+\cos\theta)}{(\sin 2\theta+\sin\theta)^2}\\&=\frac{3+3(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)}{(\sin 2\theta+\sin\theta)^2}\\&=\frac{3+3\cos\theta}{(\sin 2\theta+\sin\theta)^2}\end{aligned}$$

であるから，再び公式を用いて

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{d\theta}}=-\frac{3+3\cos\theta}{(\sin 2\theta+\sin\theta)^3}\quad\text{(答)}$$

$\boxed{9}$ **確認**：**微分係数は** 2 点を結ぶ直線の傾きの極限と定義されているので，図形的には**接線の傾きを表す**。滑らかな曲線 $y = f(x)$ の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は，微分係数が傾きで接点を通る直線として

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

と表される。ここで，ベクトル $(1,\ f'(a))$ は接(線の方向)ベクトルであるから，これに垂直な直線として，点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は

$$(x-a) + f'(a)(y - f(a)) = 0$$

となる。以上の議論では接点の座標がわかってはじめて効力を発揮するので，接点が不明のときは**まず接点の座標を文字で置いてから考察**する。

2 曲線が点 P で接するとは，点 P を共有点とし，点 P における接線が同一になることをいう。公式のようにまとめると，

「2 曲線 $y = f(x),\ y = g(x)$ が $x = t$ において接する」 $\iff \begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases}$

となる。ここでも，接点の座標を文字で置いて議論することが原則である。

解答：

(1)　$$\left(\frac{\log x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\log x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

であるから，$x = t$ における $y = \dfrac{\log x}{x}$ の接線の方程式は

$$y = \frac{1-\log t}{t^2}(x-t) + \frac{\log t}{t} \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

原点を通るとすれば

$$0 = \frac{1-\log t}{t^2}(0-t) + \frac{\log t}{t}$$

$$\log t = \frac{1}{2} \qquad \therefore\ t = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$(*)$に代入して，求める接線の方程式は

$$y = \frac{1}{2e}x \quad (答)$$

点 $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2\sqrt{e}}\right)$ における $y = \dfrac{\log x}{x}$ の法線の方程式は

$$y = -2e\left(x - \sqrt{e}\,\right) + \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

$$\therefore\ y = -2ex + \frac{4e^2+1}{2\sqrt{e}} \quad (答)$$

(2)　点 $(\alpha,\ \beta)$ の近傍で y を x の関数とみなして，$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ の両辺を x で微分すると，

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$x=\alpha,\ y=\beta$ を代入して

$$\frac{2\alpha}{a^2}-\frac{2\beta}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

したがって，ベクトル$\left(\dfrac{\alpha}{a^2},\ -\dfrac{\beta}{b^2}\right)$は点 $(\alpha,\ \beta)$ における接線の法線ベクトルとなるから，接線の方程式は

$$\frac{\alpha}{a^2}(x-\alpha)-\frac{\beta}{b^2}(y-\beta)=0$$

$\dfrac{\alpha^2}{a^2}-\dfrac{\beta^2}{b^2}=-1$ であるから，

$$\frac{\alpha x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}=-1$$

(おわり)

(3)　2 曲線 $y=ax^2,\ y=\log x$ が $x=t$ で接するとすれば，

$$\begin{cases} at^2=\log t & \cdots\cdots ① \\ 2at=\dfrac{1}{t} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①，②より

$$\log t=at^2=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

再び①に戻って，

$$a=\frac{1}{2e},\ \text{接点の座標は}\left(\sqrt{e},\ \frac{1}{2}\right)\quad \text{(答)}$$

$\boxed{10}$ **確認**：関数 $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続で，$a < x < b$ で微分可能であるとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c),\quad a < c < b$$

を満たす実数 c が少なくとも一つ存在する。これを**ラグランジュ(Lagrange)の平均値の定理**という。高校では，単に平均値の定理と呼ぶ。2 点 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$ を結ぶ直線に平行な接線が単に存在するというだけでなく，その途中に存在するという事実が重要である。各自で図をかいて，その意味するところを実感してほしい。

一般に，**閉区間において連続関数は最大値，最小値をとる**。このことは一見明らかに思えるが，高校数学の範囲では証明できない。その証明は大学の一般教養に譲ることにして，(1)では**ロル(Rolle)の定理**を証明する。平均値の定理の証明は，

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

とおくと $F(a) = F(b)$ を満たすから，この $F(x)$ にロルの定理を適用すればよい。

平均値の定理の式は $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ とも表せるので，一般の微分可能な関数に対して因数定理と同じような役割を果たすことが期待できる。実際，(2)(3)のように数列の極限の収束を導く評価式を得るのに効果を発揮する。

解答：

(1)　$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続であるから，$a \leqq x \leqq b$ で最大値 M，最小値 m が存在する。$M = m$ のときは，$f(x)$ は定数関数となって定理は明らかに成立するから，

$$M > m$$

の場合に示せばよい。このとき $M > f(a) = f(b)$ または $f(a) = f(b) > m$ となるが，必要ならば $f(x)$ のかわりに $-f(x)$ を考えることにより，

$$M > f(a) = f(b)$$

として一般性を失わない。したがって，

$$M = f(c),\quad a < c < b$$

を満たす実数 c が存在する。

$f(c)$ は最大値であるから，$x = c$ の近傍において $f(c+h) \leqq f(c)$ となり，

$$h < 0 \text{ のとき }\ \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqq 0$$

$$h > 0 \text{ のとき }\ \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqq 0$$

である。したがって，$h \to 0$ とすると

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqq 0,\quad \lim_{h\to +0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqq 0$$

となるが，$f(x)$ は $x = c$ で微分可能であるから

$$f'(c) = \lim_{h\to -0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to +0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0$$

(おわり)

(2)　$$f'(x)=\frac{1}{3}(x+3)^{-\frac{2}{3}}$$

$x>5$ のとき，平均値の定理より

$$f(x)-5=f(x)-f(5)=f'(t)(x-5),\quad 5<t<x$$

を満たす t が存在する。$t>5$ より

$$f'(t)=\frac{1}{3(t+3)^{\frac{2}{3}}}<\frac{1}{3(5+3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{12}$$

$x>5$ より $\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^3-2^3=x-5>0$ であるから

$$f(x)-5=\sqrt[3]{x+3}-2>0$$

以上より，$x>5$ のとき

$$0<f(x)-5<\frac{1}{12}(x-5)$$

であることが示された。　(おわり)

(3)　(2)で定義された関数 $f(x)$ を用いて $a_{n+1}=f(a_n)$ と表されるから，(2)より

$$0<a_{n+1}-5<\frac{1}{12}(a_n-5)$$

等比数列と同様に考えて

$$0<a_n-5<\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}(a_1-5)=\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}=0$ であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-5)=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=5\quad (答)$$

$\boxed{11}$ **確認**：関数の増減についての用語は

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leqq f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は}\textbf{単調増加}$$
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geqq f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は}\textbf{単調減少}$$

と定められている。停滞することなく増減することを強調したい場合は

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は}\textbf{狭義の単調増加}$$
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は}\textbf{狭義の単調減少}$$

と表現する。特に混同のおそれがない場合は，“狭義の”と明言しないこともある。(実際に停滞する部分があるときに“広義の”と強調することもあるが，まれである。)

微分係数(導関数の値)が正であれば右上がりの接線が引けることを意味するので，その接点の近傍では関数のグラフは増加していることになる。きちんと証明しようと思えば，平均値の定理を用いればよい。応用のことを考えると，厳密に証明することよりもイメージできることの方が大事である。減少の場合は，(1)と同じ前提条件で

開区間 $(a,\ b)$ でつねに $f'(x) < 0$ ならば $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で単調減少

であることが成り立つ。

導関数 $f'(x)$ の符号変化を調べれば関数 $f(x)$ の増減がわかるわけだが，意外にも教科書・参考書には符号の調べ方が書かれていないので，ここでまとめをしておく。

1° つねに正の値をとる因子は除外する

2° 多項式については x 切片からわかるグラフをかく

3° $\varphi(x) - \psi(x)$ は $y = \varphi(x)$ と $y = \psi(x)$ の上下関係を調べる

4° 不等式 $f'(x) > 0$ または $f'(x) < 0$ を同値変形する

5° 符号を調べる対象となる関数の増減を調べる

具体的な方法は，以下に続く問題の解答の中で示していくことにする。

関数 $f(x)$ が $x = a$ を含む十分小さい近傍で $x \fallingdotseq a$ ならば $f(x) < f(a)$ であるとき，$f(x)$ は $x = a$ で**極大**であるといい，このとき $f(a)$ を**極大値**という。同様に，$x = a$ を含む十分小さい近傍で $x \fallingdotseq a$ ならば $f(x) > f(a)$ であるとき，$f(x)$ は $x = a$ で**極小**であるといい，このとき $f(a)$ を**極小値**という。極大値と極小値をまとめて**極値**という。**一変数実数値関数の場合は増減の変わり目として極値をとらえる**ことができて，

$f(x)$ が $x = a$ で増加から減少に転じるとき，$f(x)$ は $x = a$ で極大

$f(x)$ が $x = a$ で減少から増加に転じるとき，$f(x)$ は $x = a$ で極小

が定義とみなして差し支えない。

いずれにしても，極大・極小の概念は微分法とは独立であることに注意したい。たとえば，関数 $y = |x|$ は $x = 0$ において極小であるが，$x = 0$ においては微分不可能である。(→ $\boxed{4}$)

$f(x)$ が微分可能な(一変数)関数の場合は，導関数の符号変化によって増減がとらえられるので，

$$f'(x) \text{ が } x = a \text{ で } + \to - \text{ と変化} \iff f(x) \text{ は } x = a \text{ で極大}$$
$$f'(x) \text{ が } x = a \text{ で } - \to + \text{ と変化} \iff f(x) \text{ は } x = a \text{ で極小}$$

なお，「極値がただ一つでそれが極大値」であることは，「極大値がただ一つ」であることとは意味が違うので注意すること。たとえば，関数 $y = x(x-1)(x-2)$ は極大値はただ一つであるが，極値はただ一つではない。

解答：

(1) $a \leqq u < v \leqq b$ を満たす任意の実数 $u,\ v$ に対して，平均値の定理より

$$f(v) - f(u) = f'(t)(v-u), \quad u < t < v$$

を満たす実数 t が存在する。仮定より $f'(t) > 0$ であるから

$$f(v) - f(u) > 0$$

これは，$f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で(狭義の)単調増加であることを表す。　(おわり)

(2) $$f'(x) = \frac{(1-e^{x-1})(1+e^x) - (x-e^{x-1})e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1+e^x-e^{x-1}-xe^x}{(1+e^x)^2}$$

いま，$g(x) = 1 + e^x - e^{x-1} - xe^x$ とおくと

$$g'(x) = e^x - e^{x-1} - (e^x + xe^x) = -e^x(e^{-1} + x)$$

は $-\dfrac{1}{e} - x$ と符号変化が同じであるから，$g(x)$ の増減は

x	$(-\infty)$	$-\dfrac{1}{e}$	$(+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	極大	↘

である。ここで，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0,\quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{t\to+\infty} \frac{-t}{e^t} = 0$ より

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\{1 + (1 - e^{-1} - x)e^x\} = -\infty$ と上で調べた増減より

$$g(\alpha) = 0, \quad \alpha > -\frac{1}{e}$$

を満たす実数 α がただ一つ存在して，

$$x < \alpha \text{ ならば } g(x) > 0, \quad x > \alpha \text{ ならば } g(x) < 0$$

となる。$f'(x)$ は $g(x)$ と符号変化が同じであるから，$f(x)$ の増減は

x	$(-\infty)$	α	$(+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘

となって，$f(x)$ は極値をただ一つだけもち，その極値は極大値である。　(おわり)

(注)

1° 公式 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ については，次の $\boxed{12}$ で確認する。

2° 実は $\alpha = 1$ である。ただし，上の解答では知る必要はない。

$\boxed{12}$ **確認**：不等式への応用問題は，最大・最小の問題に帰着される。本質的には，

区間 I でつねに $f(x) > 0 \iff$ 区間 I における $f(x)$ の最小値が正

区間 I でつねに $f(x) < 0 \iff$ 区間 I における $f(x)$ の最大値が負

と言い換えればよいのだが，区間 I が開区間で関数 $f(x)$ が区間 I が単調の場合は，少し面倒なことになることがある。

たとえば，(3)では $g(x) = (x+2)e^{-x} + x - 2$ は $x > 0$ で最小値は存在せず，定義域を $x \geqq 0$ として $g'(x) \geqq 0$ を導けば，今度は $g(x) \geqq 0$ までしか言えない。そこで，このような場合は，$\boxed{11}$ で確認した増減に関する基本事項を正確に思い出して，定義域は $x \geqq 0$ (を含む範囲)で，導関数の符号は $x > 0$ で考える。

本問(2)では，あとで必要となる公式の確認も行なう。異種関数の比で表された不定形なので，小手先の変形では不定形は解消されない。そこで，(1)で導いた不等式を用いて，ハサミウチに持ち込む。(2)の結果は重要公式なので，しっかり覚えておこう。

解答：

(1)　$f(x) = \sqrt{x} - \log x \ (x > 0)$ とおく。

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x} = \frac{x-4}{2x\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

は $x-4$ と符号変化が同じであるから，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	(0)		4		$(+\infty)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	

よって，任意の正の実数 x に対して，

$$f(x) \geqq f(4) = \sqrt{4} - \log 4 = 2(\log e - \log 2) > 0$$

$$\therefore\ x > 0 \text{ のとき } \log x < \sqrt{x}$$

(おわり)

(注)　導関数の符号変化を調べる場面において，$f'(x)$ は $\sqrt{x} - 2$ と符号変化が同じであるから，$y = \sqrt{x}$ と $y = 2$ のグラフの上下関係を考えてもよい。

(2)　(1)の結果と $\log x$ の性質より，$x > 1$ のとき

$$0 < \frac{\log x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

$e^x = t$ とおくと，

$$e^x = t \iff x = \log t,\quad x \to \infty \iff t \to \infty$$

であるから，上の結果を用いて

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$$

$x=\dfrac{1}{h}$ とおくと

$$x\to+0 \iff h\to+\infty$$

であるから，上の結果を用いて

$$\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{h\to+\infty}\frac{1}{h}\log\frac{1}{h}=\lim_{h\to+\infty}\frac{-\log h}{h}=0$$

(おわり)

(3)　$g(x)=(x+2)e^{-x}+x-2$ とおく。

$$\begin{aligned}g'(x)&=1\cdot e^{-x}+(x+2)(-e^{-x})+1\\&=1-(x+1)e^{-x}\\&=e^{-x}\{e^x-(x+1)\}\end{aligned}$$

は $e^x-(x+1)$ と符号変化が同じであり，曲線 $y=e^x$ は下に凸で $x=0$ における接線は $y=x+1$ であることを考えると，

$$x>0 \text{ のとき } g'(x)>0$$

よって，$g(x)$ は $x\geqq 0$ で狭義の単調増加であるから，$x>0$ のとき

$$g(x)=(x+2)e^{-x}+x-2>g(0)=0$$

(おわり)

(注)　$g''(x)=xe^{-x}$ まで計算しておき，

$x>0$ で $g''(x)>0$ であるから $x\geqq 0$ で $g'(x)$ が狭義の単調増加

となることより，$x>0$ のとき $g'(x)>0$ であることを導いてもよい。

$\boxed{13}$ **確認**：曲線上の動点が(曲線上の定点から)限りなく遠ざかるにつれて，1 つの直線に限りなく近づくとき，この直線をその曲線の**漸近線**という。具体的には，

1° $\displaystyle\lim_{x\to -a} f(x)$ または $\displaystyle\lim_{x\to +a} f(x)$ が $+\infty$ または $-\infty$ であるとき，
直線 $x=a$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

2° $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$
であるとき，直線 $y=ax+b$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

実際に漸近線を求めるには，1° のタイプは関数の分母から判断し，2° のタイプは必要条件として $a=\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ を計算する。

ところが，実際に入試で出題されるような具体的な関数の中で，漸近線をもつのは n 次式の n 乗根または分数関数(有理関数)しかないので，直観的に結果を推測してそれが漸近線であることを示す方が早い。たとえば，

$$y=\sqrt{(ax+b)^2+c}\ \text{の漸近線は}\ y=ax+b$$

$$y=ax+b+\frac{p(x)}{q(x)}\ \big(p(x)\text{の次数}<q(x)\text{の次数}\big)\ \text{の漸近線は}\ y=ax+b$$

と推測できる。

解答：

(1) $y=ax+b$ が $y=\sqrt{4x^2+12x+1}$ の漸近線となるための条件は

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\sqrt{4x^2+12x+1}-(ax+b)\right\}=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

である。$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$ であるから，必要条件として

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\left\{\sqrt{4x^2+12x+1}-(ax+b)\right\}=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$x>0$ のとき

$$\frac{1}{x}\left\{\sqrt{4x^2+12x+1}-(ax+b)\right\}=\sqrt{4+\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}$$

であるから，②より

$$a=2$$

このとき①より

$$\begin{aligned}
b&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+12x+1}-2x\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(4x^2+12x+1)-4x^2}{\sqrt{4x^2+12x+1}+2x}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{12+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{12}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2}=3
\end{aligned}$$

$x<0$ のとき

$$\frac{1}{x}\left\{\sqrt{4x^2+12x+1}-(ax+b)\right\}=-\sqrt{4+\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}$$

であるから，②より

$$a=-2$$

このとき①より

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to-\infty}\left\{\sqrt{4x^2+12x+1}-(-2x)\right\}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left\{\sqrt{4(-x)^2+12(-x)+1}+2(-x)\right\}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(4x^2-12x+1)-4x^2}{\sqrt{4x^2-12x+1}+2x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-12+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{4-\dfrac{12}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2}=-3\end{aligned}$$

よって，求める値は

$$(a,\ b)=(2,\ 3),\ (-2,\ -3)\quad (\text{答})$$

(2) $\dfrac{2x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{(x+1)(2x-1)+2}{x+1}=2x-1+\dfrac{2}{x+1}$ より

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+x+1}{x+1}-(2x-1)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x+1}=0$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to-1}(2x^2+x+1)=2,\quad x<-1\Rightarrow x+1<0,\quad x>-1\Rightarrow x+1>0$ より

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{2x^2+x+1}{x+1}=-\infty,\quad \lim_{x\to-1+0}\frac{2x^2+x+1}{x+1}=+\infty$$

以上より，求める漸近線は

$$y=2x-1,\quad x=-1\quad (\text{答})$$

$\boxed{14}$ **確認**：曲線 $y=f(x)$ が区間 I で**下に凸**であるとは，任意の $x_1,\ x_2 \in I\ (x_1 < x_2)$ に対して，2点 $\mathrm{P}(x_1,\ f(x_1))$，$\mathrm{Q}(x_2,\ f(x_2))$ を結ぶ線分 PQ より曲線 $y=f(x)$ が下方にあることをいう。**上に凸**も同様に定義される。凹凸の変わり目の点を**変曲点**という。

直観的には，接線の傾きが増加することが下に凸，減少することが上に凸ということであるから，$f(x)$ が 2 回微分可能な関数ならば

$f''(x) > 0$ となる区間で $y=f(x)$ は下に凸

$f''(x) < 0$ となる区間で $y=f(x)$ は上に凸

となることがわかる。厳密には，(1)のように平均値の定理を用いて示される。

解答：

(1) $a \leqq u < v \leqq b$ を満たす任意の実数 $u,\ v$ をとり，

$$F(x) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}(x-u)+f(u)-f(x)$$

とおくとき，$u<x<v$ で $F(x)>0$ であることを示せばよい。

$$F'(x) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u} - f'(x)$$

仮定より $F''(x) = -f''(x) < 0\ (u<x<v)$ であるから，$F'(x)$ は $u \leqq x \leqq v$ で狭義の単調減少である。平均値の定理より

$$F'(c)=0,\ u<c<v$$

を満たす実数 c が存在するから，$F'(x)$ の符号と $F(x)$ の増減は次のようになる。

x	u		c		v
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

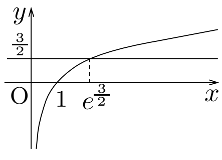
よって，$u<x<v$ において $F(x)>0$ であることが示された。　(おわり)

(2) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおくと

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x}\cdot x - (\log x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-\dfrac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\log x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\left(\log x - \dfrac{3}{2}\right)}{x^3}$$

$y=\log x$ と $y=\dfrac{3}{2}$ のグラフの上下関係から $F''(x)$ の符号変化を判断すると，



x	(0)		$e^{\frac{3}{2}}$		$(+\infty)$
$F''(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\cap$	変曲点	$\cup$	

変曲点の座標は $\left(e^{\frac{3}{2}},\ \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$　(答)

$\boxed{15}$ **確認**：関数のグラフをかくには，$\boxed{11}$, $\boxed{13}$, $\boxed{14}$で確認した基本事項を駆使することになる。グラフの概形はきれいに描く必要はないが，ていねいに描かなければならない。曲がり具合や図の計測値は不問にされるが，滑らかな曲線がとがっていたり，通るべき点を通っていなかったりすると誤りとされる。

単に「グラフの概形をかけ」とだけある場合は，凹凸や漸近線などは調べなくてもよい。その場合でも，必要なデータの記入漏れは誤りとみなされるので注意を要する。どこまで必要かという明確な基準はないが，そのあとに方程式・不等式への応用問題が続くと想定して，必要不要を判断すればまず間違いない。

増減表は結果をまとめたものなので，増減表を書くだけでは増減を調べたことにはならない。「増減を調べよ」と明記された問題では，$\boxed{11}$で確認した導関数の符号変化の考察がきちんと書かれていなければ減点の対象となる。(明記されなくても調べるのが常識ではあるが $\cdots$)

解答：

$f(x)=\dfrac{1+x-x^3}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-x$ とおいて

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}-1=-\frac{2+x+x^3}{x^3}=-\frac{x(x+1)(x^2-x+2)}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{6}{x^4}+\frac{2}{x^3}=\frac{2(x+3)}{x^4}$$

$x^2-x+2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ より $f'(x)$ は $-x(x+1)$ と符号変化が同じであり，また $f''(x)$ は $x+3$ と符号変化が同じである。

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\pm0}f(x)=\lim_{x\to\pm0}\frac{1+x-x^2}{x^2}=+\infty$$

とあわせて，増減凹凸表にまとめると

x	$(-\infty)$		-3		-1		(0)		$(+\infty)$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$		$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$		$+$	
$f(x)$	$(+\infty)$	↘	変曲点	↘	極小	↗	$(+\infty)$ ⋮ $(+\infty)$	↘	$(-\infty)$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(-x)\}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)=0$$

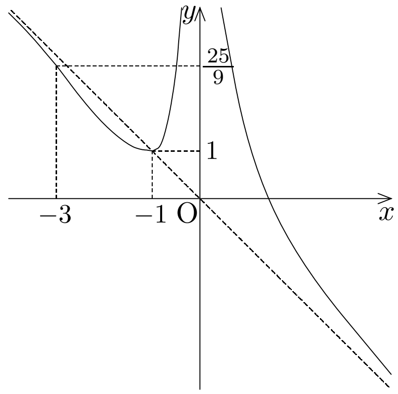
であり，$f(x)$ の分母からわかるものとあわせて，$y=f(x)$ の漸近線は

$$y=-x,\quad x=0$$

主な点の座標を計算して

$$f(-3)=\frac{1-3-(-3)^2}{(-3)^2}=\frac{25}{9},\quad f(-1)=\frac{1-1-(-1)^2}{(-1)^2}=1$$

以上のデータをもとに曲線 $y = f(x)$ の概形を図示すると，次図のようになる。



(答)

$\boxed{16}$ **確認**：曲線の媒介変数表示を得るには，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}+\overrightarrow{\mathrm{TP}}$$

などと**ベクトルの和に分割して，ベクトルによる単純化と三角関数による回転の表現をうまく活用**することがポイントである。

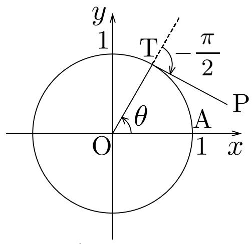
媒介変数表示曲線を図示するには，

接(線の方向)ベクトルの成分の符号の組から動点の動きを追跡する

ことにより概形をとらえる。パラメタ(媒介変数)を消去して $y=f(x)$ の形に表せるときは，$\boxed{15}$ に帰着される。

解答：

(1)　θ の定め方と三角関数の定義より



$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$\overrightarrow{\mathrm{TP}}$ と同じ向きの単位ベクトルは，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を始点のまわりに $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させたものであるから，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{TP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{TP}}|}=\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)=(\sin\theta,\ -\cos\theta)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{TP}}|$ は点 A から単位円周に沿って反時計まわりに点 T まで測った円弧の長さ θ に等しいから，

$$\overrightarrow{\mathrm{TP}}=\theta(\sin\theta,\ -\cos\theta)$$

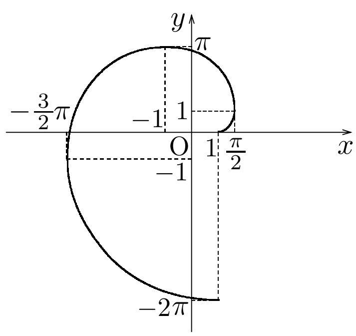
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}+\overrightarrow{\mathrm{TP}}$ であるから，

$$x=\cos\theta+\theta\sin\theta,\quad y=\sin\theta-\theta\cos\theta \quad (答)$$

(2)　$\dfrac{dx}{d\theta}=\cdots=\theta\cos\theta,\quad \dfrac{dy}{d\theta}=\cdots=\theta\sin\theta$ より

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3}{2}\pi$		2π
$\frac{dx}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{dy}{d\theta}$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
C	$(1,\ 0)$	$\nearrow$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$	$\nwarrow$	$(-1,\ \pi)$	$\swarrow$	$\left(-\frac{3}{2}\pi,\ -1\right)$	$\searrow$	$(1,\ -2\pi)$

よって，曲線 C の概形は



(答)

$\boxed{17}$ **確認**：実数解問題では，実数解を点の座標に置き換えて考えるのがポイントである。基本的な考え方は数学Iと同じであり，

「方程式 $f(x)=0$ の実数解 x」

$\iff$「2つの方程式 $y=f(x)$ と $y=0$ を同時に満たす実数 x」

$\iff$「2つの図形 $y=f(x)$ と $y=0$ の共有点の x 座標」

と解釈する。関数の増減とグラフの処理に微分を用いるところだけが数学IIIである。

実際の問題では，与えられた方程式を適当に整理(同値変形)して，関数の増減からグラフの共有点を調べる。本問(1)の場合は，両辺の差をとって得られる関数

$$f(x)=xe^{-x}-(2-x^2)$$

のグラフと x 軸の共有点が($x>0$ の範囲では)ただ1つであることを示せばよい。

「ただ1つの実数解をもつこと」を示すには，「少なくとも1つ実数解をもつこと(連続性と異符号)」と「実数解をもつとしても1つまでであること(単調性)」とに分けて，両方示さねばならないことを覚えておこう。

問題によっては，同値変形による帰着させ方がポイントとなることも多い。例えば，方程式 $xe^x-1=0$ の実数解がただ1つであることを示す場合であれば，

$$xe^x-1=0 \iff x=e^{-x}$$

と同値変形すればほとんど明らかになってしまう。ただ，本問(1)において

$$xe^{-x}=2-x^2 \iff x=(2-x^2)e^{-x}$$

と変形すると，上の $f(x)$ より処理が面倒になるので，変形すればよいわけでもない。

接線の本数を求めるには，接点の x 座標を文字(例えば t)でおいて，その条件式を満たす実数解の個数を求めればよい。直接には接点の個数を考えているので，厳密には接点と接線が1対1であることを示さねばならないが，一般の議論は高校の範囲を越えるので，採点の対象とはならない。(多項式関数の場合は触れた方が無難)

解答：

(1) $f(x)=xe^{-x}-(2-x^2)$ とおく。

$$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x(-e^{-x})+2x=e^{-x}+x(2-e^{-x})$$

$x>0$ では $e^{-x}<1$ であるから，

$$x>0 \text{ のとき } f'(x)>0$$

であり，$x>0$ で $f(x)$ は単調増加であるから，

$f(x)=0$ を満たす正の実数 x は高々1個しか存在しない。　…… ①

一方，$f(0)=-2<0$，$f(2)=2e^{-2}+2>0$ であるから，$f(x)$ の連続性より

$f(x)=0$ を満たす x は少なくとも1つ存在する。　…… ②

①かつ②より，方程式 $f(x)=0$ すなわち $xe^{-x}=2-x^2$ はただ1つの正の実数解をもつ。　(おわり)

(注)

1° 実は，全実数の範囲で $f'(x)=(1-x)e^{-x}+2x>0$ が成り立つので，

方程式 $xe^{-x}=2-x^2$ は実数解をただ1つもつ

ことがいえる。

$$f''(x) = -1\cdot e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) + 2 = (x-2)e^{-x} + 2$$
$$f'''(x) = 1\cdot e^{-x} + (x-2)(-e^{-x}) = (3-x)e^{-x}$$

$x \leqq 0$ のとき，$f'''(x) \leqq 0$ であるから $f''(x)$ は単調減少であり，

$$f''(x) \leqq f''(0) = 0$$

$f'(x)$ も単調減少となるから，

$$x \leqq 0 \text{ のとき } f'(x) \geqq f'(0) = 0$$

解答の中で示した $x > 0$ の場合とあわせて，すべての実数 x で $f'(x) > 0$ である。

2°　②を導く際に，$f(2) > 0$ の代わりに

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

を根拠としてもよいが，できるだけ具体的な数値で評価する方がよい。

(2)　$g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ とおく。

$$g'(x) = -\frac{1}{(x^2+1)^2}(x^2+1)' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$x = t$ における $y = g(x)$ の接線の方程式は

$$y = \frac{2t}{(t^2+1)^2}(x-t) + \frac{1}{t^2+1}$$

この接線が点 $(0,\ a)$ を通るとすれば，

$$a = \frac{2t}{(t^2+1)^2}(0-t) + \frac{1}{t^2+1} = \frac{2t^2+(t^2+1)}{(t^2+1)^2} = \frac{3t^2+1}{(t^2+1)^2}$$

ここで，$h(t) = \dfrac{3t^2+1}{(t^2+1)^2}$ とおくと，

$$h'(t) = \frac{6t(t^2+1)^2 - (3t^2+1)\cdot 2(t^2+1)\cdot(2t)}{(t^2+1)^4}$$
$$= \frac{6t(t^2+1) - 4t(3t^2+1)}{(t^2+1)^3} = \frac{-2t(3t^2-1)}{(t^2+1)^3}$$

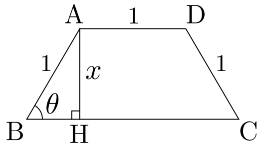
t	$(-\infty)$		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$(+\infty)$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(t)$	(0)	$\nearrow$	$\dfrac{8}{9}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\dfrac{8}{9}$	$\searrow$	(0)

$y = h(t)$ と $y = a$ のグラフの共有点の個数が求める接線の本数と一致するから，

$$\begin{cases} a \leqq 0 \text{ のとき} & 0\text{ 本} \\ 0 < a < 1 \text{ または } a = \dfrac{9}{8} \text{ のとき} & 2\text{ 本} \\ a = 1 \text{ のとき} & 3\text{ 本} \\ 1 < a < \dfrac{9}{8} \text{ のとき} & 4\text{ 本} \\ a > \dfrac{9}{8} \text{ のとき} & 0\text{ 本} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

$\boxed{18}$ **確認**：最大・最小の問題では，関数がないと議論ができない。そこで，適当な量を文字で置いて関数設定を行ない，それでうまく行くかを実際に確かめるのが基本である。

解答：



BC $<$ AD のときは台形 ABCD が正方形になるときより面積が小さいから，面積 S の最大値を求めるのであれば，

$$\mathrm{BC} \geqq \mathrm{AD} = 1$$

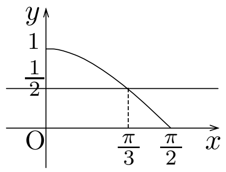
としてよい。A から BC におろした垂線の足を H とする。

$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{BCD} = \theta$ とおく。$\mathrm{BC} = 1 + 2\cos\theta$，$\mathrm{AH} = \sin\theta$ であるから，

$$S = \frac{1}{2}(1 + 1 + 2\cos\theta)\sin\theta = \sin\theta(\cos\theta + 1) \quad \left(0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\theta} &= \cos\theta(\cos\theta + 1) + \sin\theta(-\sin\theta)\\ &= \cos\theta(\cos\theta + 1) + (\cos^2\theta - 1)\\ &= 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1\\ &= (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)\end{aligned}$$

$0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ では $\dfrac{dS}{d\theta}$ は $\cos\theta - \dfrac{1}{2}$ と符号変化が同じであるから，



θ	(0)		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		↗	極大	↘	

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき } S \text{ の最大値 } \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \text{(答)}$$

別法：

$\mathrm{AH} = x$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと，$\mathrm{BH} = \sqrt{1 - x^2}$ であるから，

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + 1 + 2\sqrt{1 - x^2}\right)x = x\left(\sqrt{1 - x^2} + 1\right) \quad (0 < x \leqq 1)$$

$$\frac{dS}{dx} = \left(\sqrt{1 - x^2} + 1\right) + x \cdot \frac{(1 - x^2)'}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2 + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$0 < x < 1$ において，

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dx} < 0 \iff \sqrt{1 - x^2} < 2x^2 - 1 &\iff 1 - x^2 < (2x^2 - 1)^2\\ &\iff x^2\left(\frac{3}{4} - x^2\right) < 0\\ &\iff x > \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

のように不等式を解くことで導関数の符号が判定され，x の関数 S の増減がわかる。

(以下略)