

1

$$m - n = k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

とおくと、与えられた方程式は

$$(n+k)^3 + 1^3 = n^3 + 10^3$$

$$3n^2k + 3nk^2 + k^3 = 999 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore k(3n^2 + 3nk + k^2) = 3^3 \times 37 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②より k^3 は 3 で割り切れ、3 は素数であるから

$$k \text{ と } 3n^2 + 3nk + k^2 \text{ はともに 3 の倍数} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

であり、

$$3n^2 + 3nk + k^2 = 3n^2 + 3n(m-n) + (m-n)^2$$

$$= m^2 + mn + n^2 > 0$$

より

$$0 < k < 3n^2 + 3nk + k^2 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

であるから、③、④、⑤より

$$(k, 3n^2 + 3nk + k^2) = (3, 333), (9, 111)$$

に限られる。

(i) $k = 3$ のとき

$$333 = 3n^2 + 9n + 9 = 3(n^2 + 3n + 3)$$

$$n^2 + 3n + 3 = 111$$

$$n^2 + 3n - 108 = 0$$

$$(n+12)(n-9) = 0$$

$n \geq 2$ および①より

$$n = 9, m = 12$$

(ii) $k = 9$ のとき

$$111 = 3n^2 + 27n + 81 = 3(n^2 + 9n + 27)$$

$$n^2 + 9n + 27 = 37$$

$$n^2 + 9n - 10 = 0$$

$$(n+10)(n-1) = 0$$

$n \geq 2$ より、この式は成り立たない。

以上より、求める整数 m, n は

$$m = 12, n = 9 \quad (\text{答})$$

(注) 実質的には

$$m^3 - n^3 = (m-n)(m^2 + mn + n^2) = 999$$

を満たす整数の積の組合せを求めるだけの問題であるが、機械的に場合分けすると作業が膨大になるので、可能性を絞る工夫も必要となる。

2

(1) 点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ の軌跡が原点を中心とする単位円であることに注意して、題意の条件を言い換えると

「任意の角 θ に対して $-2 \leq x \cos \theta + y \sin \theta \leq y + 1$ 」

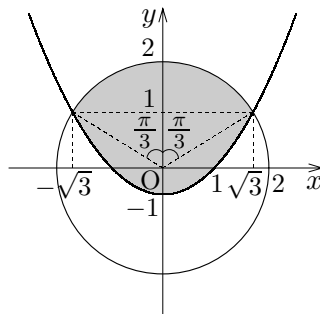
$$\iff \{(X, Y) \mid X^2 + Y^2 = 1\} \subset \{(X, Y) \mid -2 \leq xX + yY \leq y + 1\}$$

$$\iff x = y = 0 \text{ または } \begin{cases} -2 \leq x \cdot 0 + y \cdot 0 \leq y + 1 \\ \frac{|x \cdot 0 + y \cdot 0 + 2|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \geq 1 \\ \frac{|x \cdot 0 + y \cdot 0 - y - 1|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \geq 1 \end{cases}$$

$$\iff y + 1 \geq 0 \text{ かつ } x^2 + y^2 \leq 4 \text{ かつ } x^2 + y^2 \leq (y + 1)^2$$

$$\iff y \geq -1 \text{ かつ } x^2 + y^2 \leq 4 \text{ かつ } y \geq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

xy 平面上に図示すると、次図の網目部分(境界を含む)となる。



(答)

この領域の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) \right\} dx \\ &= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} - \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) dx \\ &= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} (\sqrt{3} + \sqrt{3})^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi + \sqrt{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) 前半の条件の部分は、 $(x, y) \neq (0, 0)$ のもとで三角関数の合成を用いて

$$(x \cos \theta + y \sin \theta \text{ の最小値}) \geq -2$$

$$\text{かつ } (x \cos \theta + y \sin \theta \text{ の最大値}) \leq y + 1$$

としてもよい。

(2) α と β は独立変数であり,

$$x^2 \cos \alpha + y \sin \beta \text{ の最小値は } -x^2 - |y|, \text{ 最大値は } x^2 + |y|$$

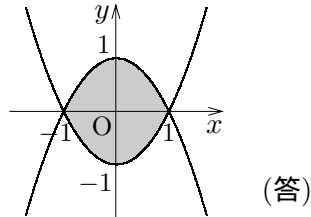
であるから, 条件は

$$-1 \leq -x^2 - |y| \text{ かつ } x^2 + |y| \leq 1$$

$$|y| \leq 1 - x^2$$

$$\therefore x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2$$

xy 平面上に図示すると, 次図の網目部分(境界を含む)となる。



対称性も考えて, この領域の面積 S_2 は

$$S_2 = 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3} \quad (\text{答})$$

③ 放物線 $y = x^2 - 2px + q$ 上の任意の点 $(t, t^2 - 2pt + q)$ に対して点 $(p, 2q)$ からの距離 $d_1(t)$ および点 (p, p) からの距離 $d_2(t)$ の最小値がどちらも 1 以下となることが題意の条件である。

$$x^2 - 2px + q = (x - p)^2 + r$$

とおくと

$$q = p^2 + r$$

であり,

$$\begin{aligned} d_1(t)^2 &= (t - p)^2 + \{(t - p)^2 + r - 2q\}^2 \\ &= (t - p)^2 + \{(t - p)^2 - 2p^2 - r\}^2 \\ &= (t - p)^4 - (4p^2 + 2r - 1)(t - p)^2 + (2p^2 + r)^2 \\ &= \left\{ (t - p)^2 - \left(2p^2 + r - \frac{1}{2} \right) \right\}^2 - \left(2p^2 + r - \frac{1}{2} \right)^2 + (2p^2 + r)^2 \\ &= \left\{ (t - p)^2 - \left(2p^2 + r - \frac{1}{2} \right) \right\}^2 + (2p^2 + r) - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$(t - p)^2 \geq 0$ を考え, $d_1(t)$ の最小値が 1 以下であることより

$$\begin{cases} 2p^2 + r - \frac{1}{2} \leq 0 \text{ のとき} & (t - p)^2 = 0 \text{ で } (2p^2 + r)^2 \leq 1 \\ 2p^2 + r - \frac{1}{2} \geq 0 \text{ のとき} & (2p^2 + r) - \frac{1}{4} \leq 1 \end{cases}$$

$p^2 + q \leq \frac{1}{2}$ のとき $-1 \leq 2p^2 + r \leq 1$, $2p^2 + r \geq \frac{1}{2}$ のとき $2p^2 + r \leq \frac{5}{4}$ であるから

$$-1 \leq 2p^2 + r \leq \frac{5}{4}$$

$$\therefore -2p^2 - 1 \leq r \leq -2p^2 + \frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} d_2(t)^2 &= (t - p)^2 + \{(t - p)^2 + r - p\}^2 \\ &= (t - p)^4 - (2p - 2r - 1)(t - p)^2 + (p - r)^2 \\ &= \left\{ (t - p)^2 - \left(p - r - \frac{1}{2} \right) \right\}^2 - \left(p - r - \frac{1}{2} \right)^2 + (p - r)^2 \\ &= \left\{ (t - p)^2 - \left(p - r - \frac{1}{2} \right) \right\}^2 + (p - r) - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$(t - p)^2 \geq 0$ を考え, $d_2(t)$ の最小値が 1 以下であることより

$$\begin{cases} p - r - \frac{1}{2} \leq 0 \text{ のとき} & (t - p)^2 = 0 \text{ で } (p - r)^2 \leq 1 \\ p - r - \frac{1}{2} \geq 0 \text{ のとき} & (p - r) - \frac{1}{4} \leq 1 \end{cases}$$

$p - r \leq \frac{1}{2}$ のとき $-1 \leq p - r \leq 1$, $p - r \geq \frac{1}{2}$ のとき $p - r \leq \frac{5}{4}$

であるから

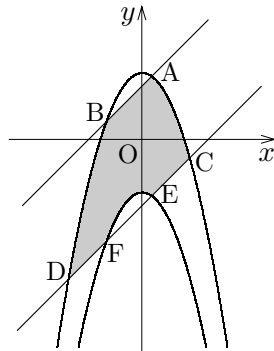
$$-1 \leq p - r \leq \frac{5}{4}$$

$$\therefore p - \frac{5}{4} \leq r \leq p + 1 \quad \dots\dots ②$$

①かつ②より，放物線 $y = x^2 - 2px + q$ の頂点 (p, r) が存在しうる領域は

$$-2x^2 - 1 \leq y \leq -2x^2 + \frac{5}{4} \quad \text{かつ} \quad x - \frac{5}{4} \leq y \leq x + 1$$

であり，図示すると次図の網目部分(境界を含む)となる。



(答)

図中の交点の座標は

$$A\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{4}, \frac{3 + \sqrt{3}}{4}\right), \quad B\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{4}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4}\right)$$

$$C\left(\frac{-1 + \sqrt{21}}{4}, \frac{-6 + \sqrt{21}}{4}\right), \quad D\left(\frac{-1 - \sqrt{21}}{4}, \frac{-6 - \sqrt{21}}{4}\right)$$

$$E\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{4}, \frac{-6 + \sqrt{3}}{4}\right), \quad F\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{4}, \frac{-6 - \sqrt{3}}{4}\right)$$

5

(1)(i) X のカードを k 回, Y のカードを $n - k$ 回選んだとき, P が到達する点は $(k, n - k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) であるから, 到達可能な点は $n + 1$ 個 (個)

(ii) 点 $(k, n - k)$ に P が到達する確率を p_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) とすると

$$p_k = {}_n C_k \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$0 \leq k \leq n - 1$ に対して

$$\begin{aligned} p_k < p_{k+1} &\iff \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1} > 1 \\ &\iff n - k > k + 1 \\ &\iff k < \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

n が偶数のとき

$$p_0 < p_1 < \dots < p_{\frac{n-2}{2}} < p_{\frac{n}{2}} > p_{\frac{n+2}{2}} > \dots > p_n,$$

n が奇数のとき

$$p_0 < p_1 < \dots < p_{\frac{n-3}{2}} < p_{\frac{n-1}{2}} = p_{\frac{n+1}{2}} > \dots > p_n$$

であるから, 確率 p_k が最大となる点は

$$\begin{cases} n \text{ が偶数のとき } \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) \\ n \text{ が奇数のとき } \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right), \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) \end{cases} \quad (\text{答})$$

(2)(i) X のカードを x 回, Y のカードを y 回, Z のカードを z 回選んだとき,

$$x + y = n - z, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

であり, z を固定すると P が到達する点の個数は(1)より

$$n - z + 1 \text{ 個}$$

であるから, z について加えることにより求める個数は

$$\sum_{z=0}^n (n - z + 1) = \frac{n+1}{2}(n+1+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad (\text{答})$$

(注) n 個のものと 2 つの仕切りを並べる(重複組合せ)と解釈して

$${}_{n+2}C_2 = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$$

と求めてもよい。

(ii) (1)より, $x + y = k$ を固定すると, P が点 (x, y) に到達する確率は

$$k \text{ が偶数のとき } (x, y) = \left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right) \text{ で最大,}$$

$$k \text{ が奇数のとき } (x, y) = \left(\frac{k+1}{2}, \frac{k-1}{2}\right), \left(\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}\right) \text{ で最大}$$

となる。このとき, 確率の最大値 q_k は

$$q_k = \begin{cases} nC_{n-k} \cdot kC_{\frac{k}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^n & (k \text{ が偶数のとき}) \\ nC_{n-k} \cdot kC_{\frac{k-1}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^n & (k \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

である。

(a) k が奇数 ($k+1$ が偶数) のとき

$$\begin{aligned} q_k < q_{k+1} &\iff \frac{q_{k+1}}{q_k} = \frac{nC_{k+1} \cdot (k+1)C_{\frac{k+1}{2}}}{nC_k \cdot kC_{\frac{k-1}{2}}} \\ &= \frac{n-k}{k+1} \cdot (k+1) \cdot \frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}{\left(\frac{k+1}{2}\right)!} \\ &= \frac{2(n-k)}{k+1} > 1 \\ &\iff 2n - 2k > k + 1 \\ &\iff k < \frac{2n-1}{3} = 2 \cdot \frac{n}{3} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

k は奇数, n は 3 の倍数であるから

$$q_k < q_{k+1} \iff k \leq 2 \cdot \frac{n}{3} - 1$$

(b) k が偶数 ($k+1$ が奇数) のとき

$$\begin{aligned} q_k < q_{k+1} &\iff \frac{q_{k+1}}{q_k} = \frac{nC_{k+1} \cdot (k+1)C_{\frac{k}{2}}}{nC_k \cdot kC_{\frac{k}{2}}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k - \frac{k}{2} + 1} > 1 \\ &\iff 2(n-k) > k + 2 \\ &\iff k < \frac{2n-2}{3} = 2 \cdot \frac{n}{3} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

k は偶数, n は 3 の倍数であるから

$$q_k < q_{k+1} \iff k \leq 2 \left(\frac{n}{3} - 1\right)$$

(a), (b) より

$$q_0 < q_1 < \cdots < q_{2\left(\frac{n}{3}-1\right)} < q_{2 \cdot \frac{n}{3}-1} < q_{2 \cdot \frac{n}{3}} > \cdots$$

であるから, $k = \frac{2n}{3}$ (偶数) のとき確率 q_k は最大となり, このとき

$$P\left(\frac{n}{3}, \frac{n}{3}\right) \quad (\text{答})$$