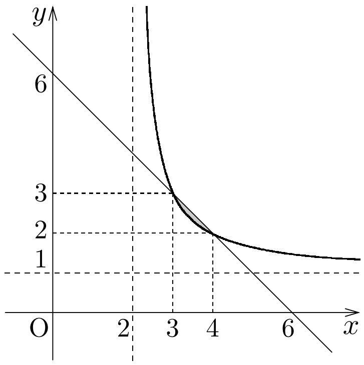
［ I ］




（1）$\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{x-2+2}{x-2}=1+\dfrac{2}{x-2}$

$\dfrac{x}{x-2}=-x+6\ (x>2)$ とおくと

$$x=-(x-6)(x-2)$$
$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)=0$$
$$\therefore\ x=3,\ 4$$

連立不等式

$$x>2,\ y\geqq\frac{x}{x-2},\ x+y\leqq 6$$

が表す領域を図示すると，右上図の網目部分(境界を含む)となる。

$3x+2y=k$ とおくと，

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{k}{2}$$

は傾き $-\dfrac{3}{2}$，$y$ 切片 $\dfrac{k}{2}$ の直線を表し，領域と共有点をもつための条件から $k$ の最大値と最小値が求められる。境界線 $y=-x+6$ と傾きを比べて，

$$(x,\ y)=(4,\ 2) \text{ のとき最大値 } 3\cdot4+2\cdot2=\underset{(あ)}{\boxed{16}}$$

をとる。

$$\left(\frac{x}{x-2}\right)'=\left(1+\frac{2}{x-2}\right)'=-\frac{3}{2} \text{ のとき}$$

$$-\frac{2}{(x-2)^2}=-\frac{3}{2}\qquad\therefore\ (x-2)^2=\frac{4}{3}$$

$x>2$ では

$$x-2=\frac{2}{\sqrt{3}}\qquad\therefore\ x=2+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$3\leqq 2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\leqq 4$ より，$k$ が最小になるのは境界線 $y=\dfrac{x}{x-2}$ に接するときであり，

$$(x,\ y)=\left(2+\frac{2}{\sqrt{3}},\ 1+\sqrt{3}\right) \text{のとき最小値}$$

$$3\left(2+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+2\left(1+\sqrt{3}\right)=\underset{(い)}{\boxed{8+4\sqrt{3}}}$$

をとる。

（2）(i)　自然数 $m$ の桁数を $k$ とするとき，

$$10^{k-1}\leqq m<10^k$$

常用対数をとると

$$k-1\leqq\log_{10}m<k$$

$$k \leqq 1+\log_{10} m < k+1 \qquad \therefore\ k = \Big[\ \underbrace{\boxed{1+\log_{10} m}}_{(う)}\ \Big]$$

(ii) $3^n$ の桁数を $k_n$ で表すと

$$k_n \leqq 1+\log_{10} 3^n < k_n + 1$$

$$n\log_{10} 3 < k_n \leqq 1 + n\log_{10} 3 \qquad \therefore\ \log_{10} 3 < \frac{k_n}{n} \leqq \frac{1}{n} + \log_{10} 3$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = \boxed{\log_{10} 3}\ \text{(え)}$$

( 3 )　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$A^2 = B^2$ より

$$\begin{cases} a^2+bc = 5 & \cdots\cdots ① \\ b(a+d) = 4 & \cdots\cdots ② \\ c(a+d) = 4 & \cdots\cdots ③ \\ bc+d^2 = 5 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

① − ④ より

$$a^2 - d^2 = (a+d)(a-d) = 0$$

②または③ より $a+d \neq 0$ であるから

$$a-d=0 \qquad \therefore\ a=d \qquad \cdots\cdots ⑤$$

② − ③ より $(b-c)(a+d)=0$

$$\therefore\ b=c \qquad \cdots\cdots ⑥$$

①，②に⑤，⑥を代入すると

$$a^2+b^2=5,\quad ab=2$$

$$(a+b)^2 = 5+2\times 2 = 9 \qquad \therefore\ a+b=\pm 3$$

解と係数の関係より，$a$，$b$ は 2 次方程式

$$x^2-3x+2=0 \ \text{または}\ x^2+3x+2=0$$

の 2 解であるから

$$(a,\ b) = (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (-1,\ -2),\ (-2,\ -1)$$

よって，求める行列 $A$ は

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}\ \text{(お)}$$

[ II ]

$$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$l : y = mx + k \qquad \cdots\cdots ②$$

①かつ② より $y$ を消去すると

$$b^2x^2 + a^2(mx + k)^2 = a^2b^2$$

$$\therefore\ (a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mkx + a^2(k^2 - b^2) = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

$C$ と $l$ が 2 点 P, Q で交わるための条件は，2 次方程式③が相異なる 2 実数解をもつことであるから，③の判別式を $D$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= a^4m^2k^2 - (a^2m^2 + b^2)\cdot a^2(k^2 - b^2)\\ &= a^4b^2m^2 - a^2b^2(k^2 - b^2)\\ &= a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - k^2) > 0 \qquad \therefore\ k^2 < a^2m^2 + b^2\end{aligned}$$

$k < 0$ より

$$-\sqrt{\underbrace{\boxed{a^2m^2 + b^2}}_{(あ)}} < k < 0 \qquad \cdots\cdots ④$$

④のもとで P$(p,\ mp+k)$, Q$(q,\ mq+k)$ とすると，$p,\ q$ は 2 次方程式③の 2 解であるから

$$|p - q| = \frac{\sqrt{D}}{a^2m^2 + b^2} = \frac{2ab\sqrt{a^2m^2 + b^2 - k^2}}{a^2m^2 + b^2}$$

$$\therefore\ \mathrm{PQ} = |p - q|\sqrt{m^2 + 1} = \frac{2ab\sqrt{\overbrace{\boxed{(m^2 + 1)(a^2m^2 + b^2 - k^2)}}^{(い)}}}{a^2m^2 + b^2}$$

点 P, Q を固定して，△PQR の面積が最大となるのは，点 R から $l$ におろした垂線の長さが最大になるときである。そのとき，点 R における $C$ の接線は $l$ と平行で，$y$ 切片は($k$ とは逆の)正となる。点 R の近傍において $C$ を関数のグラフとみなして，①の両辺を $x$ で微分すると

$$\frac{2}{a^2}x + \frac{2}{b^2}y\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

接線が $l$ と平行であるとすれば

$$-\frac{b^2x}{a^2y} = m \qquad \therefore\ \frac{bx}{ay} = -\frac{am}{b} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

①かつ⑤ を $\dfrac{x}{a}$ と $\dfrac{y}{b}$ についての連立方程式とみて解くと

$$\frac{x}{a} = \pm\frac{am}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}},\quad \frac{y}{b} = \mp\frac{b}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}} \qquad \text{(複号同順)}$$

$y$ 切片 $\mp\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}} - m\left(\pm\dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}\right)$ が正となる方を選んで，

$$\mathrm{R}\Big(-\frac{am}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\Big)$$

R から $l$ におろした垂線の長さ $h$ は，点と直線の距離公式より

$$h=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\left|m\cdot\Big(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\Big)-\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}+k\right|$$

$$=\frac{\left|-\sqrt{a^2m^2+b^2}+k\right|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$=\underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}-k}{\sqrt{m^2+1}}}}_{(\text{う})}\quad(\because\ k<0)$$

であるから，P, Q を固定したときの △PQR の面積の最大値 $A$ は

$$A=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot h=\frac{ab}{a^2m^2+b^2}\big(\sqrt{a^2m^2+b^2}-k\big)\sqrt{a^2m^2+b^2-k^2}$$

である。

次に，$m$ を固定して $k$ を動かすとき，

$$c=\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

とおくと

$$A=\frac{ab}{c^2}(c-k)\sqrt{c^2-k^2}=\frac{ab}{c^2}\sqrt{(c-k)^3(c+k)}$$

であり，$f(k)=(c-k)^3(c+k)$ とおくと

$$f'(k)=-3(c-k)^2(c+k)+(c-k)^3\cdot1$$

$$=(c-k)^2\{-3(c+k)+c-k\}=-4(c-k)^2\Big(k+\frac{c}{2}\Big)$$

は $-\Big(k+\dfrac{c}{2}\Big)$ と同符号であるから

| $k$ | $(-c)$ | | $-\dfrac{c}{2}$ | | $(0)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(k)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(k)$ | | ↗ | 極大 | ↘ | |

よって，$m$ を固定して $k$ を動かすと

$$k=\boxed{-\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{2}}\ (\text{え})$$

のとき $A$ は最大となり，$A$ の最大値は

$$\frac{ab}{a^2m^2+b^2}\cdot\Big(1+\frac{1}{2}\Big)\sqrt{a^2m^2+b^2}\sqrt{\Big(1-\frac{1}{4}\Big)(a^2m^2+b^2)}=\underbrace{\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4}ab}}_{(\text{お})}$$

［Ⅲ］ 表を上にした硬貨が

ちょうど 1 枚だけある状態を P,
ちょうど 2 枚だけありそれらが辺に沿って並んでいる状態を Q,
ちょうど 2 枚だけありそれらが対角線に沿って並んでいる状態を R,
ちょうど 3 枚だけある状態を S

で表すことにする。

(1) はじめの状態は Q であり，どの硬貨も辺に沿った隣は表裏 1 枚ずつであるから，選ばれた頂点にある硬貨について

ひっくり返す確率は $\dfrac{1}{3}$，そのままにしておく確率は $\dfrac{2}{3}$

である。1 回目の操作 T で(Q から)P となるのは，$A_1$ または $A_2$ が選ばれてひっくり返す場合であるから，

$$p_1 = p\,(\mathrm{Q} \to \mathrm{P}) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}\ \text{(あ)}$$

1 回目の操作 T で(Q から)Q となるのは，どの頂点が選ばれてもそのままにしておく場合であるから，

$$q_1 = p\,(\mathrm{Q} \to \mathrm{Q}) = \boxed{\frac{2}{3}}\ \text{(い)}$$

1 回の操作 T で 2 枚の硬貨をひっくり返すことはできず，Q → R とすることはできないので，

$$r_1 = p\,(\mathrm{Q} \to \mathrm{R}) = \boxed{0}\ \text{(う)}$$

1 回目の操作 T で(Q から)S となるのは，$A_3$ または $A_4$ が選ばれてひっくり返す場合であるから，

$$s_1 = p\,(\mathrm{Q} \to \mathrm{S}) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}\ \text{(え)}$$

(2)

$$\begin{array}{ccc} A_4(\text{裏}) & — & A_3(\text{裏}) \\ | & & | \\ A_1(\text{表}) & — & A_2(\text{裏}) \end{array}$$

(a) 状態 P のとき，確率の値を計算するだけなら，$A_1$ に置かれた硬貨だけが表を上にしているとして一般性を失わない。

頂点 $A_1$ を選んだとき

ひっくり返す確率は $\dfrac{2}{3}$，そのままにしておく確率は $\dfrac{1}{3}$

頂点 $A_2$ または $A_4$ を選んだとき

ひっくり返す確率は $\dfrac{1}{3}$，そのままにしておく確率は $\dfrac{2}{3}$

頂点 $A_3$ を選んだとき

ひっくり返す確率は 0，そのままにしておく確率は 1

P → P となるのは，どの頂点を選んでもそのままにしておく場合であるから，そ

の確率 $p\,(\mathrm{P} \to \mathrm{P})$ は

$$p\,(\mathrm{P} \to \mathrm{P}) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ となるのは，$\mathrm{A}_2$ または $\mathrm{A}_4$ が選ばれてひっくり返す場合であるから，その確率 $p\,(\mathrm{P} \to \mathrm{Q})$ は

$$p\,(\mathrm{P} \to \mathrm{Q}) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$\mathrm{P} \to \mathrm{R}$ となるのは $\mathrm{A}_3$ にある硬貨をひっくり返す場合に限られるから

確率 $p\,(\mathrm{P} \to \mathrm{R})$ は 0

$\mathrm{P} \to \mathrm{S}$ となることはないから

確率 $p\,(\mathrm{P} \to \mathrm{S})$ は 0

(b) 状態 R のとき，確率の値を計算するだけなら，$\mathrm{A}_1$ と $\mathrm{A}_3$ に置かれた硬貨は表を上にし，$\mathrm{A}_2$ と $\mathrm{A}_4$ に置かれた硬貨は裏を上にしているとして，一般性を失わない。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}_4(\text{裏}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathrm{A}_3(\text{表}) \arrow[d, dash] \\
\mathrm{A}_1(\text{表}) \arrow[r, dash] & \mathrm{A}_2(\text{裏})
\end{tikzcd}$$

どの頂点を選んでも

ひっくり返す確率は $\frac{2}{3}$，そのままにしておく確率は $\frac{1}{3}$

$\mathrm{R} \to \mathrm{P}$ となるのは，$\mathrm{A}_1$ または $\mathrm{A}_3$ が選ばれてひっくり返す場合であるから，その確率 $p\,(\mathrm{R} \to \mathrm{P})$ は

$$p\,(\mathrm{R} \to \mathrm{P}) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$\mathrm{R} \to \mathrm{Q}$ となることはないから

確率 $p\,(\mathrm{R} \to \mathrm{Q})$ は 0

$\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ となるのは，どの頂点を選ばれてもそのままにしておく場合であるから，その確率 $p\,(\mathrm{R} \to \mathrm{R})$ は

$$p\,(\mathrm{R} \to \mathrm{R}) = \frac{1}{3}$$

$\mathrm{R} \to \mathrm{S}$ となるのは，$\mathrm{A}_2$ または $\mathrm{A}_4$ が選ばれてひっくり返す場合であるから，その確率 $p\,(\mathrm{R} \to \mathrm{S})$ は

$$p\,(\mathrm{R} \to \mathrm{S}) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(c) 状態 S のとき，確率の値を計算するだけなら，$\mathrm{A}_1$ に置かれた硬貨だけが裏を上にしているとして，一般性を失わない。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}_4(\text{表}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathrm{A}_3(\text{表}) \arrow[d, dash] \\
\mathrm{A}_1(\text{裏}) \arrow[r, dash] & \mathrm{A}_2(\text{表})
\end{tikzcd}$$

頂点 $\mathrm{A}_1$ を選んだとき

ひっくり返す確率は $\frac{2}{3}$，そのままにしておく確率は $\frac{1}{3}$

頂点 $\mathrm{A}_2$ または $\mathrm{A}_4$ を選んだとき

ひっくり返す確率は $\dfrac{1}{3}$，そのままにしておく確率は $\dfrac{2}{3}$

頂点 $\mathrm{A}_3$ を選んだとき

ひっくり返す確率は 0，そのままにしておく確率は 1

$\mathrm{S} \to \mathrm{P}$ となることはないから

確率 $p(\mathrm{S} \to \mathrm{P})$ は 0

$\mathrm{S} \to \mathrm{Q}$ となるのは，$\mathrm{A}_2$ または $\mathrm{A}_4$ が選ばれてひっくり返す場合であるから，その確率 $p(\mathrm{S} \to \mathrm{Q})$ は

$$p(\mathrm{S} \to \mathrm{Q}) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$\mathrm{S} \to \mathrm{R}$ になるとすれば $\mathrm{A}_3$ をひっくり返す場合に限るから

確率 $p(\mathrm{S} \to \mathrm{R})$ は 0

$\mathrm{S} \to \mathrm{S}$ となるのは，どの頂点が選ばれてもそのままにしておく場合であるから，その確率 $p(\mathrm{S} \to \mathrm{S})$ は

$$\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

(a), (b), (c)および (1)より

$$p_n = \underbrace{\boxed{\frac{2}{3}}}_{(お)} p_{n-1} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{6}}}_{(か)} q_{n-1} + \frac{1}{3} r_{n-1} + 0 \cdot s_{n-1} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$q_n = \underbrace{\boxed{\frac{1}{6}}}_{(き)} p_{n-1} + \underbrace{\boxed{\frac{2}{3}}}_{(く)} q_{n-1} + 0 \cdot r_{n-1} + \frac{1}{6} s_{n-1} \qquad \cdots\cdots ②$$

$$r_n = \underbrace{\boxed{0}}_{(け)} p_{n-1} + \underbrace{\boxed{0}}_{(こ)} q_{n-1} + \frac{1}{3} r_{n-1} + 0 \cdot s_{n-1} \qquad \cdots\cdots ③$$

$$s_n = 0 \cdot p_{n-1} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{6}}}_{(さ)} q_{n-1} + \frac{1}{3} r_{n-1} + \underbrace{\boxed{\frac{2}{3}}}_{(し)} s_{n-1} \qquad \cdots\cdots ④$$

③より，$\{r_n\}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるが，(1)より $r_1 = 0$ であるから，任意の自然数 $n$ に対して

$$r_n = \boxed{0} \ (す)$$

( 3 ) ①－④ より

$$p_n - s_n = \frac{2}{3}(p_{n-1} - s_{n-1})$$

であるから，$\{p_n - s_n\}$ は公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるが，(1)より $p_1 - s_1 = 0$ であるから

$$p_n - s_n = 0 \qquad \therefore\ p_n = s_n$$

(証明おわり)

( 4 ) $r_n = 0$, $p_n = s_n$ を盛り込むと，①, ② は

$$p_n = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{6}q_{n-1},\quad q_n = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}q_{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となるから，

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,p_n + q_n &= \sqrt{2}\left(\frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{6}q_{n-1}\right) + \left(\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}q_{n-1}\right)\\ &= \frac{1+2\sqrt{2}}{3}p_{n-1} + \frac{4+\sqrt{2}}{6}q_{n-1}\\ &= \frac{4+\sqrt{2}}{6}(\sqrt{2}\,p_{n-1} + q_{n-1})\end{aligned}$$

$\left\{\sqrt{2}\,p_n + q_n\right\}$は初項 $\sqrt{2}\,p_1 + q_1 = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$, 公比 $\frac{4+\sqrt{2}}{6}$ の等比数列であるから

$$\sqrt{2}\,p_n + q_n = \underbrace{\boxed{\left(\frac{4+\sqrt{2}}{6}\right)^n}}_{(せ)} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

同様にして，⑤より

$$-\sqrt{2}\,p_n + q_n = \frac{4-\sqrt{2}}{6}(-\sqrt{2}\,p_{n-1} + q_{n-1})$$

$$\therefore\ -\sqrt{2}\,p_n + q_n = \underbrace{\boxed{\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}\right)^n}}_{(そ)} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

も得られるから，⑥かつ⑦ より

$$p_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{4+\sqrt{2}}{6}\right)^n - \left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}\right)^n\right\}$$

$$q_n = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{4+\sqrt{2}}{6}\right)^n + \left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}\right)^n\right\}$$

[IV] $x = f(t) = \cos 2t + t\sin 2t$

$y = g(t) = \sin 2t - t\cos 2t$

(1) $t$ で2回微分して

$$f'(t) = -2\sin 2t + 1\cdot\sin 2t + t\cdot 2\cos 2t$$
$$= -\sin 2t + 2t\cos 2t$$
$$f''(t) = -2\cos 2t + 2\cos 2t + 2t(-2\sin 2t) = -4t\sin 2t$$
$$g'(t) = 2\cos 2t - 1\cdot\cos 2t - t(-2\sin 2t)$$
$$= \cos 2t + 2t\sin 2t$$
$$g''(t) = -2\sin 2t + 2\sin 2t + 2t\cdot 2\cos 2t = 4t\cos 2t$$

加速度ベクトル $\overrightarrow{\alpha}$ は

$$\overrightarrow{\alpha} = (f''(t),\ g''(t)) = \Big(\underset{(あ)}{\boxed{-4t\sin 2t}},\ \underset{(い)}{\boxed{4t\cos 2t}}\Big)$$

(2) $t \neq 0$ のとき

$$\overrightarrow{\alpha} \perp (\cos 2t,\ \sin 2t)$$

であるから，$l$ の方程式は

$$(\cos 2t)\{x - f(t)\} + (\sin 2t)\{y - g(t)\} = 0$$
$$\therefore\ (\cos 2t)(x - \cos 2t) + (\sin 2t)(y - \sin 2t) = 0$$

接線の公式より，直線 $l$ は円 $C : x^2 + y^2 = 1$ の点 $\mathrm{Q}\Big(\underset{(う)}{\boxed{\cos 2t}},\ \underset{(え)}{\boxed{\sin 2t}}\Big)$ における接線である。 (証明おわり)

(3) $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において

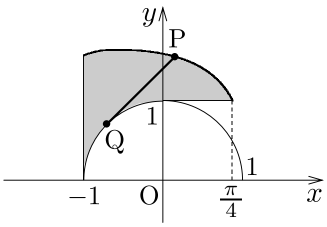
$$f''(t) = -4t\sin 2t < 0$$

であるから，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $f'(t)$ は(狭義単調)減少であり，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$f'(t) = -\sin 2t + 2t\cos 2t < f'(0) = 0$$

よって，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $f(t)$ は(狭義単調)減少である。 (証明おわり)

(4) (3)より，$f(t)$ は $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において単調であるから逆関数 $t = f^{-1}(x)$ が存在し，点 P の軌跡は関数 $y = g \circ f^{-1}(x)$ のグラフである。さらに，(2)より直線 PQ は点 Q における円 $C : x^2 + y^2 = 1$ の接線となるから，$\dfrac{\pi}{4} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において線分 PQ が動いてできる図形は，次図の網目部分(境界を含む)のようになる。




線分 PQ の通過領域の面積 $S$ は

$$S = \int_{-1}^{\frac{\pi}{4}} g \circ f^{-1}(x)\,dx - \pi \cdot 1^2 \times \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4} \cdot 1$$

$x = f(t)$ により置換積分することにより

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}} g \circ f^{-1}(x)\,dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} g(t) f'(t)\,dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2t - t\cos 2t)(-\sin 2t + 2t\cos 2t)\,dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (-\sin^2 2t + 3t\sin 2t\cos 2t - 2t^2\cos^2 2t)\,dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{\cos 4t - 1}{2} + \frac{3}{2} t\sin 4t - t^2(1 + \cos 4t) \right\} dt \\
&= \left[ \frac{1}{8}\sin 4t - \frac{t}{2} + \frac{3}{2} t\left(-\frac{1}{4}\cos 4t\right) - \frac{t^3}{3} - t^2 \cdot \frac{1}{4}\sin 4t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&\qquad + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{8}{3} \cdot 1 \cdot \cos 4t + \frac{1}{4} \cdot 2t\sin 4t \right) dt \\
&= 0 + \frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^3}{64} - \frac{\pi^3}{8}\right) + 0 \\
&\qquad + \left[ \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{2} t\left(-\frac{1}{4}\cos 4t\right) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4t\,dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{9}{32}\pi + \frac{7}{192}\pi^3 + 0 - \frac{1}{8}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{7}{192}\pi^3$$

となるから，

$$S = \frac{7}{192}\pi^3 \quad (答)$$

(注) $t$ の微小変化量 $\Delta\, t$ に対して線分 PQ が掃いた領域の微小面積 $\Delta S$ は，半径 $\overline{\mathrm{PQ}} = t$, 中心角 $2\,\Delta\, t$ の扇形で近似できるから，

$$\Delta S \doteqdot \frac{1}{2}t^2 \cdot 2\,\Delta\, t = t^2\,\Delta\, t \qquad \therefore\ \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta\, t} = t^2$$

よって，求める通過領域の面積 $S$ は

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{64}\right) = \frac{7}{192}\pi^3$$

と求めることもできる。