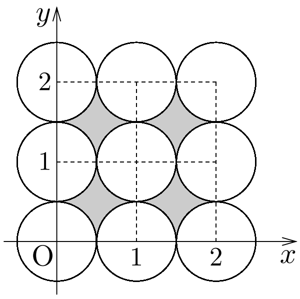
$\boxed{1}$

(1) $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ のとき，C_1 が内部に格子点を含まないような C_1 の中心 $(x,\ y)$ の存在範囲は

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \\ (x-1)^2 + y^2 \geqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \geqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \\ x^2 + (y-1)^2 \geqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

この領域を D_1 とし，D_1 を x 軸方向に $+1$ だけ平行移動したものを D_2，D_1 を x 軸方向，y 軸方向ともに $+1$ だけ平行移動したものを D_3，D_1 を y 軸方向に $+1$ だけ平行移動したものを D_4 とするとき，$D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ が求める範囲であり，図示すると次図の網目部分(境界を含む)となる。



(答)

(2) C_2 の中心を点 $(a,\ b)$ に置くとき，C_2 の内部に格子点を含まないとする。

$$m \leqq a \leqq m+1,\quad n \leqq b \leqq n+1$$

を満たす整数 $m,\ n$ が必ず存在し，x 軸方向に $-m$，y 軸方向に $-n$ だけ平行移動しても格子点は格子点に移るから，

$$0 \leqq a \leqq 1,\quad 0 \leqq b \leqq 1$$

としても，C_2 の内部に格子点を含まない。

さらに，直線 $x = \dfrac{1}{2}$ および直線 $y = \dfrac{1}{2}$ に関して対称移動しても格子点は格子点に移るから，

$$0 \leqq a \leqq \frac{1}{2},\quad 0 \leqq b \leqq \frac{1}{2}$$

としても，C_2 の内部に格子点を含まない。このとき

$$a^2 + b^2 \geqq \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

であるが，

$$a^2 + b^2 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8}{16}$$

であるから矛盾する。

　よって，中心 $(a,\ b)$ をどのような位置に移動させても，C_2 の内部に格子点は存在する。　(証明おわり)

(3)　(2)と同様に考えると，座標空間内において球 S の中心 $(a,\ b,\ c)$ が

$$0 \leqq a \leqq \frac{1}{2},\quad 0 \leqq b \leqq \frac{1}{2},\quad 0 \leqq c \leqq \frac{1}{2}$$

の範囲にあるとき

$$a^2 + b^2 + c^2 < r^2$$

を満たすことが，半径 r の球 S をどのような位置に移動させても内部に格子点を含む条件である。

$$a^2 + b^2 + c^2 \text{ の最大値は } \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

であるから，r のとりうる値の範囲は，

$$\frac{3}{4} < r^2 \quad (r > 0)$$

より

$$r > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(答)}$$

$\boxed{2}$

(1)　$g(x)=f(x+3)-f(x)=a(6x+9)+3b=6ax+(9a+3b)$

x が 3 で割り切れない整数ならば，$x+3$ も 3 で割り切れない整数であるから，3 で割り切れないすべての整数 x に対して $g(x)$ は整数である。特に

$$g(-1)=3a+3b,\quad g(-2)=-3a+3b$$

は整数であるから，

$$6a=g(-1)-g(-2),\quad 9a+3b=2g(-1)-g(-2)$$

はともに整数である。

$f(x)$ は 2 次式で $a\neq 0$ である(仮定 $a>0$ よりと考えてもよい)から

$$6a\neq 0$$

であり，$g(x)$ は係数および定数項が整数となる 1 次式である。　(証明おわり)

(2)　(1)の考察より，条件 C は

$$f(1),\ f(-1),\ 6a,\ 3a+3b \text{ がいずれも整数}$$

となることと同値である。

$$f(1)=a+b+c=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

のもとで

$$6a=k,\quad f(1)-f(-1)=2b=l$$

とおくと，

$$a=\frac{k}{6},\ b=\frac{l}{2}\quad (k,\ l \text{ は整数}) \qquad \cdots\cdots ②$$

①より

$$c=1-\frac{k}{6}-\frac{l}{2} \qquad \cdots\cdots ③$$

$a>0$，$b>0$，$c>0$ より，k，l は

$$k+3l<6$$

を満たす自然数であり，$3a+3b=\dfrac{1}{2}k+\dfrac{3}{2}l$ が整数となる条件

$$k\equiv l \pmod 2 \qquad \cdots\cdots ④$$

を考慮すると，

$$(k,\ l)=(1,\ 1)$$

に限られる。②，③より

$$a=\frac{1}{6},\quad b=\frac{1}{2},\quad c=\frac{1}{3}$$

であるから，求める 2 次式 $f(x)$ は

$$f(x)=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\quad \text{(答)}$$

(3)　(2)の考察において $f(1)=1$ だけをはずすことにより，条件 C は

$$f(1)=a+b+c,\ f(1)-f(-1)=2b,\ 6a,\ 3a+3b \text{ がいずれも整数}$$

となることと同値であることがわかる。

$2b$ が整数であることより，m_2，m_3 とは独立に

$$\text{自然数 } m_1 \text{ の最小値は } 2$$

整数 p，q，r を用いて

$$6ap + 2bq + (3a + 3b)r = (6p + 3r)a + (2q + 3r)b$$

と表すとき，$m_2 = 6p + 3r$，$m_3 = 2q + 3r$ を自然数に限定すると

$$m_2 \geqq 3,\quad m_3 \geqq 1$$

であり，

$$p = 0,\ q = -1,\ r = 1$$

のとき等号が成立するから，

$$m_2 + m_3 \text{ の最小値は } 3 + 1 = 4$$

よって，$m_1 + m_2 + m_3$ が最小となる自然数の組は

$$(m_1,\ m_2,\ m_3) = (2,\ 3,\ 1) \quad \text{(答)}$$

(4)　(2)において $f(1) = 1$ を

$$f(1) = a + b + c = n \qquad \cdots\cdots ⑤$$

に置き換えることにより，

$$\text{条件 C かつ } f(1) = n \iff \text{②かつ④かつ⑤}$$

である。

②，⑤より k，l は

$$k + 3l < 6n \qquad \cdots\cdots ⑥$$

を満たす自然数であり，④を考えると

(i)　$l = 2j - 1$ $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のとき，k は

$$0 < k < 3(2n - 2j + 1)$$

を満たす奇数であり，

$$k = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 6(n - j) + 1 \text{ の } 3(n - j) + 1 \text{ 個}$$

(ii)　$l = 2j$ $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n - 1)$ のとき，k は

$$0 < k < 6(n - j)$$

を満たす偶数であり，$n \geqq 2$ のもとで

$$k = 2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 6(n - j) - 2 \text{ の } 3(n - j) - 1 \text{ 個}$$

求める 2 次式 $f(x)$ の個数 N は，④かつ⑥を満たす自然数 $(k,\ l)$ の個数と同数であり，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{j=1}^{n}\{3(n - j) + 1\} + \sum_{j=1}^{n-1}\{3(n - j) - 1\} \\
&= \frac{n}{2}(3n - 2 + 1) + \frac{n - 1}{2}(3n - 4 + 2) \\
&= \frac{1}{2}(3n^2 - n) + \frac{1}{2}(3n^2 - 5n + 2) \\
&= 3n^2 - 3n + 1 \quad (n = 1 \text{のときも成立}) \quad \text{(答)}
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

(1)　$f'(x) = 2\cos 2x - a\sin x = 2(1 - 2\sin^2 x) - a\sin x = -4\sin^2 x - a\sin x + 2$

$\sin x = t$ とおき，

$$g(t) = -4t^2 - at + 2 = -4\left(t + \frac{a}{8}\right)^2 + \frac{a^2}{16} + 2$$

とおくと，$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ のおいて $t = \sin x$ が狭義単調増加であることに注意すると，

$$\text{「}f(x)\text{ が }-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\text{ の相異なる 2 点で極値を持つ」}$$

$$\iff \text{「}f'(x)\text{ が }-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\text{ で 2 回符号を変える」}$$

$$\iff \text{「}g(t)\text{ が }-1 < t < 1\text{ において 2 回符号を変える」}$$

$$\iff \begin{cases} g(-1) = a - 2 < 0 \\ -1 < -\dfrac{a}{8} < 1 \\ g(1) = -a - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\iff -2 < a < 2 \quad \text{(答)}$$

(2)　$f(x) = \sin 2x + a\cos x = 2\sin x\cos x + a\cos x = 2\left(\sin x + \dfrac{a}{2}\right)\cos x$

であるから，定数 θ を

$$\sin\theta = -\frac{a}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

により定めると，

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \{-f(x)\}\,dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}\cos 2x - a\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} + \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + a\sin x\right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta - a\sin\theta\right) - \left(-\frac{1}{2} + a\right) + \left(\frac{1}{2} + a\right) \\
&= (1 - 2\sin^2\theta) - 2a\sin\theta + 1 \\
&= 1 - 2\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - 2a\left(-\frac{a}{2}\right) + 1 \quad (\because ①) \\
&= \frac{1}{2}a^2 + 2 \quad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(3)　$-2 < a < 2$ のもとで $f'(x) = -4(\sin x - \sin\alpha)(\sin x - \sin\beta)$ であるから，
$\sin\alpha$，$\sin\beta$ は 2 次方程式 $g(t) = 0$ の 2 解であり，解と係数の関係より

$$\sin\alpha + \sin\beta = -\frac{a}{4},\quad \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ②$$

$-2 < a < 2$ より

$$g\left(-\frac{a}{2}\right) = -4\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - a\left(-\frac{a}{2}\right) + 2 = -\frac{1}{2}a^2 + 2 > 0$$

であるから，(2)で定めた θ について

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \theta < \beta < \frac{\pi}{2}$$

となることに注意すると，(2)と同様に

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx = \int_\alpha^\theta \{-f(x)\}\,dx + \int_\theta^\beta f(x)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\cos 2x - a\sin x\right]_\alpha^\theta + \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + a\sin x\right]_\theta^\beta$$

ここで，

$$F(t) = \frac{1}{2}\cos 2t - a\sin t = \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 t) - a\sin t$$

とおいて，①，②を用いると

$$F(\theta) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)^2 - a\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}$$
$$\begin{aligned} F(\alpha) + F(\beta) &= 1 - (\sin^2\alpha + \sin^2\beta) - a(\sin\alpha + \sin\beta) \\ &= 1 - (\sin\alpha + \sin\beta)^2 + 2\sin\alpha\sin\beta - a(\sin\alpha + \sin\beta) \\ &= 1 - \left(-\frac{a}{4}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - a\left(-\frac{a}{4}\right) \\ &= \frac{3}{16}a^2 \end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx &= 2F(\theta) - \{F(\alpha) + F(\beta)\} \\ &= 2\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{16}a^2 \\ &= \frac{5}{16}a^2 + 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$