1 座標平面または座標空間において，座標成分がすべて整数である点を格子点という。以下の各問いに答えよ。

(1) C_1 を座標平面上の半径 0.5 の円とする。C_1 が内部に格子点を含まないとき，C_1 の中心 $(x,\ y)$ が存在しうる領域を $0 \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq 2$ の範囲で図示せよ。

(2) C_2 を座標平面上の半径 0.75 の円とする。C_2 は中心をどのような位置に移動させても必ず内部に格子点を含むことを証明せよ。

(3) S を座標空間内の半径 r の球とする。S は半径を変化させずに中心をどのような位置に移動させても，必ず内部に格子点を含むとする。このとき r のとりうる値の範囲を求めよ。ここで S の内部とは，S の中心からの距離が r より小さい点全体からなる集合のことである。

2 正の実数 a，b，c を係数とする 2 次式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ に関して，次の条件 C を考える。

条件 C：3 で割り切れないすべての整数 x について $f(x)$ が整数となる。

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が条件 C を満たすとき，$g(x) = f(x+3) - f(x)$ は係数および定数項が整数となる 1 次式であることを示せ。

(2) 条件 C を満たす $f(x)$ のうち，$f(1) = 1$ となるものを求めよ。

(3) 以下の条件 C′ が条件 C と同値となるような自然数の組 $(m_1,\ m_2,\ m_3)$ のうち，$m_1 + m_2 + m_3$ が最小となるものを求めよ。

条件 C′：$m_1 b$，$m_2 a + m_3 b$，$a + b + c$ がいずれも整数となる。

(4) n を自然数とする。条件 C を満たす $f(x)$ のうち，$f(1) = n$ となるものの個数を n を用いて表せ。

3 関数 $f(x)=\sin 2x+a\cos x$ について，以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$が区間 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の相異なる2点で極値を持つような，aの値の範囲を求めよ。

(2) aが(1)で求めた範囲にあるとき，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|f(x)|dx$ をaを用いて表せ。

(3) aが(1)で求めた範囲にあるとき，$f(x)$が極値をとるxの値を $x=\alpha, \beta$（ただし $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$）とする。$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$ をaを用いて表せ。