

I.

(i) $(a + bi)^3 = 4 + i$ の両辺複素共役をとると

$$(a - bi)^3 = 4 - i$$

となるから,

$$\frac{(a - bi)^3}{2 + 3i} = \frac{(4 - i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{\overset{(1)}{\boxed{5}}}{\underset{(2)(3)}{\boxed{13}}} - \frac{\overset{(4)(5)}{\boxed{14}}}{\underset{(6)(7)}{\boxed{13}}}i$$

(ii) 2倍角の公式より

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

$$\cos \theta \sin 2\theta = \cos \theta \cdot 2\sin \theta \cos \theta = 2\sin \theta(1 - \sin^2 \theta)$$

であるから,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3})(1 - 2\sin^2 \theta) + (4 - 3\sqrt{3})\sin \theta \\ &\quad - 4\sin \theta(1 - \sin^2 \theta) - \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{3}) \\ &= 4\sin^3 \theta + 3(\sqrt{3} - 1)\sin^2 \theta - 3\sqrt{3}\sin \theta - 2 \end{aligned}$$

ここで,

$$t = \sin \theta, \quad g(t) = 4t^3 + 3(\sqrt{3} - 1)t^2 - 3\sqrt{3}t - 2$$

とおくと,

$$\begin{aligned} g'(t) &= 12t^2 + 6(\sqrt{3} - 1)t - 3\sqrt{3} \\ &= 3\{4t^2 + 2(\sqrt{3} - 1)t - \sqrt{3}\} \\ &= 3(2t - 1)(2t + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

t	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$		↗ 極大	↘ 極小	↗	

$$g(-1) = -4 + 3(\sqrt{3} - 1) + 3\sqrt{3} - 2 = -9 + 6\sqrt{3} > 0$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}(\sqrt{3} - 1) - \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2 = \frac{-9 - 3\sqrt{3}}{4} < 0$$

であるから, $t = \sin \theta = \frac{1}{2}$ のとき $g(t)$ は最小となり, $f(\theta)$ は

$$\theta = \overset{(8)(9)}{\boxed{30}}^\circ \text{ のとき最小値 } - \frac{\overset{(10)}{\boxed{9}}}{\underset{(11)}{\boxed{4}}} - \frac{\overset{(12)}{\boxed{3}}}{\underset{(13)}{\boxed{4}}} \sqrt{\overset{(14)}{\boxed{3}}}$$

をとる。

(iii) 題意の 2 の倍数の集合を A , 3 の倍数の集合を B , 5 の倍数の集合を C とすると, 仮定より

$$n(A \cup B \cup C) = 35 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$n(A) = 20, \quad n(B) = 13, \quad n(C) = 11 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$n(A \cap B \cap C) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$n(B \cap C) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$n(A \cap B) = \frac{1}{2}n((A \cap C) \cup (B \cap C)) \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

③, ⑤より

$$2n(A \cap B) = n(A \cap C) + n(B \cap C) \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

一般に,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\ - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

が成り立つから, ①, ②, ③, ⑥より

$$35 = 20 + 13 + 11 - 3n(A \cap B) + 0$$

$$\therefore n(A \cap B) = \boxed{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(15)

④, ⑦を⑥に代入して

$$2 \times 3 = n(A \cap C) + 2 \quad \therefore n(A \cap C) = \boxed{4}$$

(16)

II.

(i) $A_n(a_n, 5a_n + 2)$ に対して

$$P_n(a_n, 2a_n + 3)$$

であり, A_{n+1} と P_n は y 座標が等しいから

$$5a_{n+1} + 2 = 2a_n + 3$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n + \frac{1}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha = \frac{2}{5}\alpha + \frac{1}{5} \text{ とおくと}$$

$$\frac{3}{5}\alpha = \frac{1}{5} \quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① - ② より

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \left(a_n - \frac{1}{3} \right)$$

よって, $\left\{ a_n - \frac{1}{3} \right\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, 公比 $\frac{2}{5}$ の等比数列であるから,

$$a_n - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} \quad \therefore a_n = \frac{\boxed{4}}{\boxed{3}} \left(\frac{\boxed{2}}{\boxed{5}} \right)^{n-1} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$$

(17) (18) (19) (20) (21) (22)

題意の設定より, $\{b_n\}$ の漸化式は $\{a_n\}$ と同じであり, $b_1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$ であるから,

$$b_n - \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} \quad \therefore b_n = \left(\frac{\boxed{2}}{\boxed{5}} \right)^{n-1} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$$

(23) (24) (25) (26)

(ii) 四角形(台形) $A_{n+1}B_{n+1}Q_nP_n$ の面積 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \{ (a_n - a_{n+1}) + (b_n - b_{n+1}) \} \{ g(a_n) - g(b_n) \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{2}{5} \right) + \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{2}{5} \right) \right\} \times 2(a_n - b_n) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} + 1 \right) \cdot \frac{3}{5} \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} \times 2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} \\ &= \frac{\boxed{7}}{\boxed{15}} \left(\frac{\boxed{4}}{\boxed{25}} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

(27) (28)(29) (30) (31)(32)

III.

(i) 点Pのx座標をpとすると、CとlがPで接するための条件は

$$\begin{cases} -p^2 + \frac{9}{4} = \sqrt{3}(p - k) & \dots\dots \textcircled{1} \\ -2p = \sqrt{3} & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

であり、②より

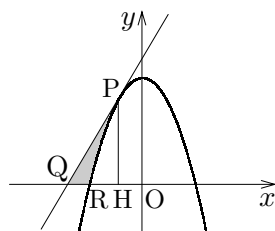
$$p = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore P\left(-\frac{\sqrt{\frac{(33)}{3}}}{\frac{(34)}{2}}, \frac{\frac{(35)}{3}}{\frac{(36)}{2}}\right)$$

①より

$$k = p + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(p^2 - \frac{9}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{3}{4}\right) = -\sqrt{\frac{(37)}{3}}$$

(ii) 線分PQ, QRと放物線Cで囲まれる部分の面積をS₁する。点Pからx軸におろした垂線の足をHとして、直角三角形PQHの面積から余計な部分の面積を引くと考えて、求める面積S₁は

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right) \cdot \frac{3}{2} \\ &\quad - \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) dx \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x\right]_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{3} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{27}{8}\right) - \frac{9}{4} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{\frac{(38)(39)}{8}}{\frac{(40)}{8}} \sqrt{\frac{(41)}{3}} - \frac{\frac{(42)}{9}}{\frac{(43)}{4}} \end{aligned}$$



(iii) Q(-√3, 0)を通り、∠PQR = π/3を二等分する直線mの方程式は

$$y = (x + \sqrt{3}) \tan \frac{\pi}{6} \quad \therefore y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$$

ここで、

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + \frac{9}{4} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + 1\right) \\ &= -\left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{3} \\ &= -\left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

$$= -\left(x + \frac{5}{2\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

とおくと、放物線 C と直線 m によって囲まれる部分の面積 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-\frac{5}{2\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f(x) dx \\ &= -\int_{-\frac{5}{2\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(x + \frac{5}{2\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2\sqrt{3}}\right)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3 \\ &= \frac{32}{9\sqrt{3}} \\ &= \frac{\overset{(44)(45)}{\boxed{32}}}{\underset{(46)(47)}{\boxed{27}}} \sqrt{\underset{(48)}{\boxed{3}}} \end{aligned}$$

IV.

(i) 内積の定義式より

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \frac{3 \times 3 + 0 \times \sqrt{3} + 0 \times 3}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2} \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2 + 3^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{\frac{21}{7}}}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

(ii) Qは線分OB上の点であるから

$$\vec{OQ} = k\vec{OB} \quad (0 \leq k \leq 1)$$

と表され,

$$\vec{AQ} = k(3, \sqrt{3}, 3) - (3, 0, 0) = (3(k-1), \sqrt{3}k, 3k)$$

$$|\vec{AQ}| = \sqrt{9(k-1)^2 + 3k^2 + 9k^2}$$

 $\angle OAQ = 60^\circ$ より

$$\vec{AO} \cdot \vec{AQ} = |\vec{AO}| |\vec{AQ}| \cos 60^\circ$$

$$-3 \times 3(k-1) = 3 \times \sqrt{9(k-1)^2 + 3k^2 + 9k^2} \times \frac{1}{2}$$

$$-6(k-1) = \sqrt{9(k-1)^2 + 3k^2 + 9k^2}$$

$$36(k-1)^2 = 9(k-1)^2 + 12k^2$$

$$9(k-1)^2 = 4k^2 \quad \therefore 3(k-1) = \pm 2k$$

 $0 \leq k \leq 1$ より

$$3(k-1) = -2k \quad \therefore k = \frac{3}{5}$$

(iii) $R(x, y, z)$ とおくと, 与えられた条件は

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 & (r > 0) & \dots\dots ① \\ \vec{OR} \cdot \vec{OA} = 3x = 3r \cos 30^\circ & \dots\dots ② \\ \vec{OR} \cdot \vec{OB} = 3x + \sqrt{3}y + 3z = 2\sqrt{3}r & \dots\dots ③ \end{cases}$$

②, ③より

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}r, \quad y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}z + 2r = -\sqrt{3}z + \frac{r}{2} \quad \dots\dots ④$$

①に代入して

$$\frac{3}{4}r^2 + \left(-\sqrt{3}z + \frac{r}{2}\right)^2 + z^2 = r^2 \quad \therefore z = 0 \text{ または } \frac{\sqrt{3}}{4}r$$

④より y も求めて, 点Rの座標は

$$R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r, \frac{r}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r, -\frac{r}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}r\right) \quad (\text{答})$$