$\boxed{1}$

(1) 解と係数の関係より

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ ab+bc+ca=1 \\ abc=-5 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ①$$

であるから，

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &= 2^2-2\times 1 = 2 \qquad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

(a) a は 3 次方程式 $x^3-2x^2+x+5=0$ の解であるから

$$a^3-2a^2+a+5=0$$

$$\therefore\ a^3=2a^2-a-5 \qquad \cdots\cdots ③$$

同様にして，b, c についても

$$b^3=2b^2-b-5 \qquad \cdots\cdots ④$$

$$c^3=2c^2-c-5 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

であるから，③ + ④ + ⑤ に ①，②を代入して

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= 2(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)-15 \\ &= 2\times 2-2-15 \\ &= -\underbrace{\boxed{13}}_{(アイ)} \qquad \cdots\cdots ⑥ \end{aligned}$$

（注）公式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

を用いてもよい。その場合でも ②の準備は必要である。

(b) ③ $\times a$ + ④ $\times b$ + ⑤ $\times c$ に ①，②，⑥を代入して

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= a(2a^2-a-5)+b(2b^2-b-5)+c(2c^2-c-5) \\ &= 2(a^3+b^3+c^3)-(a^2+b^2+c^2)-5(a+b+c) \\ &= 2\times(-13)-2-5\times 2 \\ &= -\underbrace{\boxed{38}}_{(ウエ)} \end{aligned}$$

（注）③，④，⑤を用いず，①，②だけを用いて

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= (a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \\ &= (a^2+b^2+c^2)^2 \\ &\qquad -2\{(ab+bc+ca)^2-2(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)\} \\ &= (a^2+b^2+c^2)^2-2(ab+bc+ca)^2+4abc(a+b+c) \\ &= 2^2-2\times 1^2+4\times(-5)\times 2 \end{aligned}$$

と計算してもよい。

(2)(a) $a \neq 0$ のとき

$$ax^2+bxy+ay^2 = a\left(x^2+\frac{b}{a}xy\right)+ay^2$$
$$= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2+\frac{4a^2-b^2}{4a^2}y^2\right\}$$

と変形され，$a,\ b \in \{-1,\ 0,\ 1\}$ のもとで

「$ax^2+bxy+ay^2=0$ ならば $x=y=0$」 $\iff 4a^2-b^2>0$

$\iff a=\pm 1$

であるから，

求める確率は $\dfrac{\boxed{2}^{(オ)}}{\boxed{3}_{(カ)}}$

(b) $a,\ b \in \{-1,\ 0,\ 1\}$ のもとで

「$a(x-y)^2+b(y-z)^2+c(z-x)^2=0$ ならば $x=y=z$」

$\iff$「$a(x-y)^2+b(y-z)^2+c(z-x)^2=0$

ならば $x-y,\ y-z,\ z-x$ の少なくとも 2 つが 0」

$\iff a=b=c\neq 0$ または $a=b\neq 0,\ c=0$

または $a=c\neq 0,\ b=0$ または $a=0,\ b=c\neq 0$

であるから，求める確率は

$$\frac{2+2+2+2}{3^3}=\frac{\boxed{8}^{(キ)}}{\boxed{27}_{(クケ)}}$$

(3)(a)

$$\overrightarrow{\mathrm{FA}}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)-(1,\ 0,\ h)=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -h\right)$$

と

$$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ h\right)-(1,\ 0,\ h)=\left(-\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$$

の内積は

$$\overrightarrow{\mathrm{FA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FD}}=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0=\boxed{0}\ ^{(コ)}$$

(b) P は線分 AD 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$=(1-t)\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)+t\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ h\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}(1-2t),\ \frac{\sqrt{3}}{2}(2t-1),\ ht\right)\quad(0\leqq t\leqq 1)\qquad\cdots\cdots ①$$

と表される。P は線分 FC 上の点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\,\overrightarrow{\mathrm{OF}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= s(1,\ 0,\ h) + (1-s)(-1,\ 0,\ 0)\\ &= (2s-1,\ 0,\ hs) \quad (0 \leqq s \leqq 1) \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

と表される。①かつ②より

$$\frac{1}{2}(1-2t) = 2s-1 \text{ かつ } \frac{\sqrt{3}}{2}(2t-1) = 0 \text{ かつ } ht = hs$$

$$\therefore\ s = t = \frac{1}{2}$$

①または②に代入して

$$\mathrm{P}\left(\underset{(サ)}{\boxed{0}},\ \underset{(シ)}{\boxed{0}},\ \frac{h}{\underset{(ス)}{\boxed{2}}}\right)$$

(c) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ h\right) - \left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right) = (-1,\ \sqrt{3},\ h)$

$$\overrightarrow{\mathrm{FC}} = (-1,\ 0,\ 0) - (1,\ 0,\ h) = (-2,\ 0,\ -h)$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{FC}}$ が垂直であるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FC}} = -1\cdot(-2) + 0 + h\cdot(-h) = 0$$

$h > 0$ より

$$h = \sqrt{\boxed{2}}\ (セ)$$

(d) $h = \sqrt{2}$ のとき $\mathrm{P}\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PE}} = \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{2}\right) - \left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right) - \left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PF}} = (1,\ 0,\ \sqrt{2}\,) - \left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(1,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{PE}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{PF}}\right| = \frac{\sqrt{6}}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PE}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PF}} = \overrightarrow{\mathrm{PE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PF}} = 0$$

であるから，三角錐 APFE の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PF}}\right)\overline{\mathrm{PE}} = \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{\overset{(ソ)}{\boxed{6}}}}{\underset{(タ)}{\boxed{8}}}$$

$\boxed{2}$

(1) 加法定理より

$$f(\theta)=\sin\theta+\sin(\pi-t-\theta)=2\sin\frac{\pi-t}{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi-t}{2}\right)$$

$0<\dfrac{\pi-t}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\dfrac{\pi-t}{2}>0$ であるから

$$f(\theta)\text{が最大}\iff\cos\left(\theta-\frac{\pi-t}{2}\right)\text{が最大}$$

$-\dfrac{\pi-t}{2}<\theta-\dfrac{\pi-t}{2}<\dfrac{\pi-t}{2}$ より

$$\theta-\frac{\pi-t}{2}=0\ \text{すなわち}\ \theta=\frac{\pi-t}{2}\quad(\text{答})$$

のとき $f(\theta)$ は最大であり，最大値 $m(t)$ は

$$m(t)=2\sin\frac{\pi-t}{2}=2\cos\frac{t}{2}\quad(\text{答})$$

(2) **(1)**の結果，$g(t)$ は

$$g(t)=\sin t+2\cos\frac{t}{2}$$

であり，

$$\begin{aligned}g'(t)&=\cos t+2\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\right)\\&=\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)-\sin\frac{t}{2}\\&=\left(1+\sin\frac{t}{2}\right)\left(1-2\sin\frac{t}{2}\right)\end{aligned}$$

$0<t<\pi$ において

$$g'(t)<0\iff\frac{1}{2}<\sin\frac{t}{2}\iff\frac{\pi}{6}<\frac{t}{2}<\frac{\pi}{2}\iff\frac{\pi}{3}<t<\pi$$

であるから，$g(t)$ の増減は

t	(0)		$\frac{\pi}{3}$		(π)
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		↗	極大	↘	

よって，$g(t)$ は

$$t=\frac{\pi}{3}\quad(\text{答})$$

のとき，最大値

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\quad(\text{答})$$

をとる。

(3)(a)　$\triangle$ABC の頂点 A における内角 t が動く範囲は

$$0 < t < \pi \quad \text{(答)}$$

(b)　正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\theta} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin(\pi - t - \theta)} = \frac{\mathrm{BC}}{\sin t} = 2 \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

$$\therefore\ \ \mathrm{AB} = 2\sin\theta,\ \ \mathrm{AC} = 2\sin(\pi - t - \theta)$$

$\mathrm{AB} + \mathrm{AC} = 2f(\theta)$ であるから，(1)より

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}+\mathrm{AC}\text{が最大} &\iff \theta = \frac{\pi - t}{2} \\ &\iff \angle B = \theta = \pi - t - \theta = \angle C \\ &\iff \mathrm{AB} = \mathrm{AC}\end{aligned}$$

よって，線分 AB と線分 AC の長さの和が最大となるための必要十分条件は

$\triangle$ABC が AB = AC なる二等辺三角形　(答)

となることである。

(c)　$(*)$より

$$\mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{BC} = 2\sin\theta + 2\sin(\pi - t - \theta) + 2\sin t$$

(b)を満たすとき，(2)より

$$\mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{BC} = 2g(t)$$

であり，

$$\mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{BC}\text{ の最大値は } 2g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3} \quad \text{(答)}$$

である。

$\boxed{3}$

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{6}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{4} & -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{6}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{4} & -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (答)

(2) $A\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 3+2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-2 \end{pmatrix}$ より

$\mathrm{P}_2(\,3\sqrt{2}+2\sqrt{6},\ 3\sqrt{6}-2\sqrt{2}\,)$

$A^2\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ より

$\mathrm{P}_3(6,\ 4)$

面積公式を用いて

$$\begin{aligned}
\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 &= \triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2 - \triangle \mathrm{OP}_2\mathrm{P}_3 \\
&= \frac{1}{2}\left|12(3\sqrt{6}-2\sqrt{2}\,) - 8(3\sqrt{2}+2\sqrt{6}\,)\right| \\
&\qquad - \frac{1}{2}\left|6(3\sqrt{6}-2\sqrt{2}\,) - 4(3\sqrt{2}+2\sqrt{6}\,)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|20\sqrt{6}-48\sqrt{2}\,\right| - \frac{1}{2}\left|10\sqrt{6}-24\sqrt{2}\,\right| \\
&= \left|5\sqrt{6}-12\sqrt{2}\,\right| \\
&= 12\sqrt{2}-5\sqrt{6} \quad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(注)　$12\sqrt{2}-5\sqrt{6} = \sqrt{6}\,(4\sqrt{3}-5) = \sqrt{6}\,(\sqrt{48}-\sqrt{25}\,) > 0$

(3) **(1)**より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{2n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{OP}_2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_{2n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}$$

であるから，$\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_{2n}\mathrm{P}_{2n+1}$ の面積 S_n は

$$\begin{aligned}
S_n &= \triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_{2n} - \triangle \mathrm{OP}_{2n}\mathrm{P}_{2n+1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\triangle \mathrm{OP}_2\mathrm{P}_3
\end{aligned}$$

$0 < \dfrac{1}{2} < 1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0 \quad \text{(答)} \qquad \cdots\cdots ①$$

(4) 線分 $\mathrm{P}_{2n}\mathrm{P}_1$ の下方に現れる三角形の面積和を U_n とすると

$$U_n < T_n < U_n + S_n \qquad \cdots\cdots ②$$

ここで,

$$V_n = \triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 + \triangle\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5 + \cdots + \mathrm{P}_{2n-3}\mathrm{P}_{2n-2}\mathrm{P}_{2n-1}$$

とおくと,

$$V_n - S_n < U_n < V_n \qquad \cdots\cdots ③$$

$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 \backsim \mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5 \backsim \cdots \backsim \triangle\mathrm{P}_{2n-3}\mathrm{P}_{2n-2}\mathrm{P}_{2n-1}$ であるから，(1), (2)より

$$V_n = \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-4}\right\}\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{4}}(12\sqrt{2} - 5\sqrt{6}\,)$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}\left(16\sqrt{2} - \frac{20}{3}\sqrt{6}\right)$$

$0 < \frac{1}{4} < 1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} V_n = 16\sqrt{2} - \frac{20}{3}\sqrt{6} \qquad \cdots\cdots ④$$

③において $n \to \infty$ とすると，①および ④より

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 16\sqrt{2} - \frac{20}{3}\sqrt{6}$$

②および ①より

$$\lim_{n\to\infty} T_n = 16\sqrt{2} - \frac{20}{3}\sqrt{6} \quad (答)$$