平成 21 年度　〔試験時間　100 分〕

E 1　数　学

この冊子は，数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 受験番号等記入の指示があったら，直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し，さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。

(3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆（H B または B）を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしなさい。

④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。 2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしなさい。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰りなさい。

1 次の $\boxed{ア}$ から $\boxed{タ}$ において，$\boxed{}$ 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め，その数を**解答用**マークシートにマークせよ。ただし，$\boxed{}$ は 1 桁(けた)の数，$\boxed{\,\vdots\,}$ は 2 桁の数を表す。また，分数は既約分数として表すものとする。

(50 点)

(1) a, b, c が次の 3 次方程式の解であるとする。

$$x^3 - 2x^2 + x + 5 = 0$$

(a) このとき，$a^3 + b^3 + c^3$ の値は $-\boxed{ア\,\vdots\,イ}$ である。

(b) このとき，$a^4 + b^4 + c^4$ の値は $-\boxed{ウ\,\vdots\,エ}$ である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(2) (a) 袋の中に 1 が書かれた球，0 が書かれた球，-1 が書かれた球が 1 つずつ入っている。この袋から球を 1 個とりだし，袋の中に戻す操作を続けて 2 回行う。最初に取り出した球に書かれていた数を a とし，次に取り出した球に書かれていた数を b とする。このとき，実数 x, y についての式 $ax^2+bxy+ay^2$ が次の条件

「$ax^2+bxy+ay^2=0$ ならば $x=y=0$」

を満たす確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である。

(b) (a) で用意した袋から球を 1 個とりだし，袋の中に戻す操作を続けて 3 回行う。1 回目と 2 回目に取り出した球により a, b を (a) のように定め，3 回目に取り出した球に書かれていた数を c とする。このとき，実数 x, y, z についての式 $a(x-y)^2+b(y-z)^2+c(z-x)^2$ が次の条件

「$a(x-y)^2+b(y-z)^2+c(z-x)^2=0$ ならば $x=y=z$」

を満たす確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$ である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(3) 空間に点 $A(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$，点 $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$，点 $C(-1, 0, 0)$ があり，さらに正の実数 h を z 座標にもつ点 $D(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, h)$，点 $E(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, h)$，点 $F(1, 0, h)$ があるとする。

(a) ベクトル $\overrightarrow{FA}$ とベクトル $\overrightarrow{FD}$ の内積は $\boxed{コ}$ である。

(b) 線分 AD と線分 FC の交点 P の座標は $(\boxed{サ}, \boxed{シ}, \frac{h}{\boxed{ス}})$ である。

(c) h の値が $\sqrt{\boxed{セ}}$ であるとき，ベクトル $\overrightarrow{AD}$ とベクトル $\overrightarrow{FC}$ は垂直である。

(d) h が **(c)** で求めた値である場合，三角形 APF を底面とし点 E を頂点とする三角錐(すい)の体積は $\frac{\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$ である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 $\boxed{2}$ の解答は，**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

$\boxed{2}$ 以下の **(1)** から **(3)** の問に答えよ。ただし，**(1)** および **(2)** で得られた結論は，必要なら **(3)** の解答の際に用いてよい。

(25 点)

(1) $0 < t < \pi$ をみたす実数 t をとる。実数 θ が $0 < \theta < \pi - t$ の範囲を動くとき，関数 $f(\theta) = \sin\theta + \sin(\pi - t - \theta)$ の値が最大になるような θ の値と，関数 $f(\theta)$ の最大値 $m(t)$ を求めよ。

(2) **(1)** で求めた $m(t)$ を用いて関数 $g(t) = \sin t + m(t)$ を定める。実数 t が $0 < t < \pi$ の範囲を動くとき，関数 $g(t)$ の値が最大になるような t の値と，関数 $g(t)$ の最大値 M を求めよ。

(3) 半径 1 の円 T に内接する三角形 ABC の頂点 A における内角を t で表し，頂点 C における内角を θ で表すことにする。

(a) 頂点 A における内角 t が動く範囲を求めよ。

(b) 頂点 A における内角 t を一定に保ちながら頂点 A が円 T 上を動くとき，線分 AB と線分 AC の長さの和が最大になるための必要十分条件を三角形 ABC についての条件として述べよ。

(c) **(b)** で求めた条件をみたす三角形 ABC の頂点 A における内角 t を，**(a)** で求めた範囲で動かすことにより，この三角形の 3 辺の長さの和の最大値を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 $\boxed{3}$ の解答は，**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上に点 $\mathrm{P}_1(12, 8)$ がある。これを行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$ で表される変換で移した点を P_2 とし，この点を再びこの変換で移した点を P_3 とする。この操作をくりかえし，一般に点 P_n をこの変換で移した点を P_{n+1} とする。

(25 点)

(1) 行列 A^2 を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ を頂点にもつ三角形の面積を求めよ。

(3) 自然数 n に対して点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_{2n}, \mathrm{P}_{2n+1}$ を頂点にもつ三角形の面積を S_n とする。極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

(4) n を 2 以上の自然数とする。線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$, $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$, $\cdots$, $\mathrm{P}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n}$ からなる折れ線と，この折れ線の 2 つの端点を結ぶ線分 $\mathrm{P}_{2n}\mathrm{P}_1$ によって囲まれるすべての三角形の面積の和 T_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} T_n$ を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。