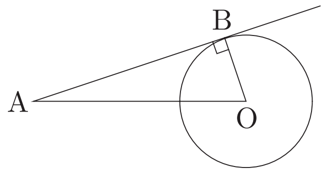
A 1



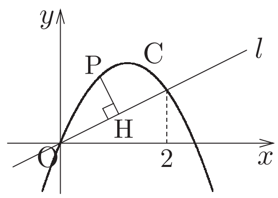
（1） 1つの接点を B とするとき，$\angle\mathrm{OAB} = \dfrac{\pi}{12}$，

$\angle\mathrm{OBA} = \dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{OB} = r$ であるから

$$\frac{r}{\mathrm{OA}} = \sin\frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \ (ア)$$

(注) $\dfrac{\pi}{12}$ は準有名角なので三角関数の値は知っておくべきであるが，

$\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ に加法定理を適用して求めることもできる。



（2） C と l の式を連立させて y を消去すると

$$x\left(\frac{5}{2} - x\right) = \frac{1}{2}x$$

$$x(x-2) = 0 \qquad \therefore\ x = 0,\ 2$$

C と l が囲む図形の面積 S は

$$S = \int_0^2 \left\{x\left(\frac{5}{2} - x\right) - \frac{1}{2}x\right\} dx = -\int_0^2 x(x-2)\,dx = \frac{1}{6}\cdot 2^3 = \boxed{\frac{4}{3}} \ (イ)$$

辺 AB の長さは一定であるから，

「△ABP の面積が最大」$\Longleftrightarrow$「PH の長さが最大」

$\Longleftrightarrow$「P における C の接線が l に平行」

であり，最大値を与える点 P を $\mathrm{P}_0\left(t,\ \dfrac{5}{2}t - t^2\right)$ とすると，

$$\frac{5}{2} - 2t = \frac{1}{2} \qquad \therefore\ t = 1$$

$$\therefore\ \mathrm{P}_0\left(\underset{(ウ)}{\boxed{1}},\ \underset{(エ)}{\boxed{\frac{3}{2}}}\right)$$

P_0 を通り，

$$l : y = \frac{1}{2}x \qquad \cdots\cdots ①$$

に垂直な直線の方程式は

$$y = -2(x-1) + \frac{3}{2}$$

$$\therefore\ y = -2x + \frac{7}{2} \qquad \cdots\cdots ②$$

①かつ② を解くことにより

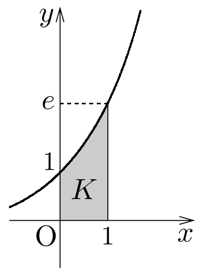
$$\mathrm{H}\left(\underset{(オ)}{\boxed{\frac{7}{5}}},\ \underset{(カ)}{\boxed{\frac{7}{10}}}\right)$$

(3)　　$K : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq e^x$

を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V_x は

$$V_x = \int_0^1 \pi e^{2x}\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \underbrace{\boxed{\frac{\pi}{2}(e^2-1)}}_{\text{(ウ)}}$$

K を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V_y は



$$\begin{aligned} V_y &= \int_0^1 2\pi x e^x\,dx \\ &= 2\pi\Big[xe^x\Big]_0^1 - 2\pi\int_0^1 1\cdot e^x\,dx \\ &= 2\pi e - 2\pi\Big[e^x\Big]_0^1 \\ &= 2\pi e - 2\pi(e-1) \\ &= \boxed{2\pi}\ \text{(ケ)} \end{aligned}$$

(別法)　V_y は次のように計算してもよい。

$$\begin{aligned} V_y &= \pi\cdot 1^2\cdot e - \int_1^e \pi(\log y)^2\,dy \\ &= \pi e - \pi\Big[y(\log y)^2\Big]_1^e + \pi\int_1^e y\cdot 2(\log y)\frac{1}{y}\,dy \\ &= \pi e - \pi(e-0) + 2\pi\int_1^e \log y\,dy \\ &= 0 + 2\pi\Big[y(\log y - 1)\Big]_1^e \\ &= \boxed{2\pi}\ \text{(ケ)} \end{aligned}$$

A 2

2 回は必ず試行が行われるから，p_2 は単に 2 回目に 4 以下の目が出る確率であり，

$$p_2 = \boxed{\frac{2}{3}}\ (ケ)$$

3 回目が行われ，4 以下の目が出るとき，1 回目と 2 回目が連続して 5 以上の目が出るということはないので，

$$p_3 = \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{16}{27}}\ (コ)$$

$n+2$ 回目が行われ，かつ $n+2$ 回目に 4 以下の目が出たとき，

- $n+1$ 回目に 4 以下の目が出た
- $n+1$ 回目に 5 以上，n 回目に 4 以下の目が出た

のいずれかのはずであるから，

$$p_{n+2} = \frac{2}{3}\left(p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

$p_{n+2} - \beta p_{n+1} = \alpha(p_{n+1} - \beta p_n)$ とおくと

$$p_{n+2} = (\alpha + \beta)p_{n+1} - \alpha\beta p_n$$

2 式を比べて

$$\alpha + \beta = \frac{2}{3},\quad \alpha\beta = -\frac{2}{9} \qquad \cdots\cdots ②$$

α，β を 2 解とする 2 次方程式は

$$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} \qquad \therefore\ x - \frac{1}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\alpha > \beta$ より

$$\alpha = \underbrace{\boxed{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}}_{(サ)},\quad \beta = \frac{1-\sqrt{3}}{3}$$

このとき，①は

$$p_{n+2} - \beta p_{n+1} = \alpha(p_{n+1} - \beta p_n)$$

と表されるから，②も考えて，$\{p_{n+1} - \beta p_n\}$ は初項 $p_1 - \beta p_0 = \dfrac{2}{3} - \beta = \alpha$ の等比数列であるから

$$p_{n+1} - \beta p_n = \alpha \cdot \alpha^n = \alpha^{n+1} \qquad \cdots\cdots ③$$

同様に，

$$p_{n+2} - \alpha p_{n+1} = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n)$$

も成り立つから，

$$p_{n+1} - \alpha p_n = \beta^{n+1} \qquad \cdots\cdots ④$$

③ − ④ より

$$(\alpha-\beta)p_n=\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}$$

$$\therefore\ \ p_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\underbrace{\boxed{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n+1}}}_{(シ)}\right)$$

n 回目が行われ，n 回目に 5 以上の目が出たとき，

- $n-1$ 回目に 4 以下の目が出た
- $n-1$ 回目に 5 以上，$n-2$ 回目に 4 以下の目が出た

のいずれかのはずであるから，

$$q_n=\boxed{\frac{1}{3}\left(p_{n-1}+\frac{1}{3}p_{n-2}\right)}\ (ス)$$

①より $q_n=\dfrac{1}{2}p_n$ であるから，（シ）より

$$q_n=\frac{\sqrt{3}}{4}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ より無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n+1}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\beta^{n+1}$ はともに収束するから，②も用いて

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}q_n&=\frac{1}{2(\alpha-\beta)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\beta^{n+1}\right)\\&=\frac{1}{2(\alpha-\beta)}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}-\frac{\beta^2}{1-\beta}\right)\\&=\frac{1}{2(\alpha-\beta)}\cdot\frac{\alpha^2(1-\beta)-\beta^2(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta-\alpha\beta}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{6+2}{9-6-2}\\&=\underbrace{\boxed{4}}_{(セ)}\end{aligned}$$

A 3

円 $(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$ と曲線 C が接するのは，曲線 $y=(x-a)^2+\left(\dfrac{1}{x}-a\right)^2$ と直線 $y=r^2$ が $x>0$ において接することと同値である。

$$f(x)=(x-a)^2+\left(\frac{1}{x}-a\right)^2$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
f'(x)&=2(x-a)+2\left(\frac{1}{x}-a\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\
&=2\left(x-\frac{1}{x^3}\right)-2a\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\\
&=\frac{2(x^4-1)}{x^3}-\frac{2a(x^2-1)}{x^2}\\
&=\frac{2(x^2-1)(x^2+1-ax)}{x^3}\\
&=\frac{2(x+1)(x-1)\left\{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+1\right\}}{x^3}
\end{aligned}$$

$1<a\leqq \underset{(\text{ソ})}{\boxed{2}}$ のとき，$x>0$ においてつねに $x+1\geqq 0$，$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+1\geqq 0$ であるから，

x	(0)		1		$(+\infty)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	$(+\infty)$

よって，$f(x)$ は $x=\underset{(\text{タ})}{\boxed{1}}$ でのみ極小となるから，半径 $r=\sqrt{f(1)}=\underset{(\text{チ})}{\boxed{\sqrt{2}(a-1)}}$ の円だけが曲線 C に接する。

$a>2$ のとき，$x>0$ において

$$f'(x)\text{ は }(x-1)\left(x-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right)\left(x-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right)\text{と同符号}$$

である。

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}-1&=\frac{\left(\dfrac{a}{2}-1\right)^2-\left(\dfrac{a^2}{4}-1\right)}{\dfrac{a}{2}-1+\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-1}}\\
&=\frac{2-a}{\dfrac{a}{2}-1+\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-1}}<0
\end{aligned}$$

より

$$\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}<1<\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}$$

であることを考え，

x	(0)		$\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}$		1		$\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}$		$(+\infty)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗	

よって，$f(x)$ は $x=1$ で極大となり，$x=\underset{(ツ)}{\boxed{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}}}$，$\underset{(テ)}{\boxed{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}}}$

において極小となるから，半径 $r=\sqrt{f(1)}$ の円のほかに，半径

$$r=\sqrt{f\left(\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right)}$$

の円が $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}$ において曲線 C に接する。このとき，

$$x^2+1-ax=0 \text{ すなわち } x+\frac{1}{x}=a$$

を満たすから

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+\frac{1}{x^2}-2a\left(x+\frac{1}{x}\right)+2a^2 \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}-2a\left(x+\frac{1}{x}\right)+2a^2 \end{aligned}$$

であることに注意すると，

$$f\left(\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right)=a^2-2-2a\cdot a+2a^2=a^2-2$$

より

$$r=\underset{(ト)}{\boxed{\sqrt{a^2-2}}}$$

A 4

$f(x) = \dfrac{1}{2}(x^3 + 3x)$ とおくと,

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x^2 + 1) > 0$$

より $f(x)$ は狭義単調増加であるから，$N(R) = 1$ となるのは

$$f(1) \leqq R < f(2) \text{ すなわち } \underbrace{\boxed{2}}_{(\text{ナ})} \leqq R < \underbrace{\boxed{7}}_{(\text{ニ})}$$

のときであり，一般に

$$N(R) = n \iff f(n) \leqq R < f(n+1) \iff n \leqq x(R) < n+1$$

である。

$x = u - \dfrac{1}{u}$ とおくと

$$f\left(u - \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(u - \frac{1}{u}\right)^3 + 3\left(u - \frac{1}{u}\right)\right\} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\left(u^3 - \frac{1}{u^3}\right)}}_{(\text{ヌ})}$$

であり,

$$\frac{1}{2}\left(u^3 - \frac{1}{u^3}\right) = a \quad (u > 0)$$

を満たす u を求めると，$u^6 - 2au^3 - 1 = 0$ より

$$u^3 = \underbrace{\boxed{a + \sqrt{a^2 + 1}}}_{(\text{ネ})} \qquad \therefore\ u = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + 1}}$$

であるから,

$$x(a) = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + 1}}}$$

特に,

$$x(R) = \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + 1}}}$$

である。

$N(R) \leqq x(R) < N(R) + 1$ より

$$x(R) - 1 < N(R) \leqq x(R)$$

$$\therefore\ R^{-C}x(R) - R^{-C} < R^{-C}N(R) \leqq R^{-C}x(R) \quad \cdots\cdots ①$$

$$\lim_{R\to\infty} x(R) = \lim_{R\to\infty}\left(\sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + 1}}}\right) = \infty \text{ より}$$

$$C \leqq 0 \text{ のとき } R^{-C} \geqq 1,\ \lim_{R\to\infty} R^{-C}N(R) = \infty \quad \cdots\cdots ②$$

$C > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} R^{-C} = 0$ であり,

$$\lim_{R\to\infty} R^{-C}x(R) = \lim_{R\to\infty}\left(R^{\frac{1}{3}-C}\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{1}{R^2} + 1}} - \frac{R^{-C}}{\sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + 1}}}\right)$$

$$= \begin{cases} +\infty & \left(C < \dfrac{1}{3}\right) \\ \sqrt[3]{2} & \left(C = \dfrac{1}{3}\right) \\ 0 & \left(C > \dfrac{1}{3}\right) \end{cases} \qquad \cdots\cdots ③$$

であるから，①，②，③およびハサミウチの原理より，$L = \lim\limits_{R \to \infty} R^{-C} N(R)$ が有限な正の値となるのは $C = \underset{(ノ)}{\boxed{\dfrac{1}{3}}}$ のときであり，そのとき $L = \underset{(ハ)}{\boxed{\sqrt[3]{2}}}$ である。

B 1

（1） $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4} \\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \sin\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}$

で表される 1 次変換は，原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させる変換と $\sqrt{2}$ 倍相似拡大させる変換との合成であるから，(原点が不動点であることも考え，) 円 C の像は

原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円　(答)

である。

（2） 連立方程式 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ を解くことにより，C と l の交点は

$$\left(\underset{(ヒ,\,ヘ)}{\boxed{-\frac{1}{\sqrt{5}}}},\ \underset{(フ,\,ホ)}{\boxed{-\frac{2}{\sqrt{5}}}}\right),\quad \left(\underset{(ヘ,\,ヒ)}{\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}},\ \underset{(ホ,\,フ)}{\boxed{\frac{2}{\sqrt{5}}}}\right)$$

（3） C の像は C であるから，3 点 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の像が C 上にあることが必要であり，

$a^2 + c^2 = 1$ …… ①

$b^2 + d^2 = 1$ …… ②

$\left(\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{c+d}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ …… ③

①, ②を③に代入すると

$ab + cd = 0$ …… ④

①より

$$a = \cos\theta,\ \ c = \sin\theta$$

と表され，

$$④ \iff (a,\ c) \perp (b,\ d)$$

であることに注意して，②を考えあわせると

$$(b,\ d) = \pm(-\sin\theta,\ \cos\theta)$$

となるから，

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

であることが，C の像が C になるための必要条件である。

(i) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のとき

A は原点のまわりに θ 回転させる変換を表すから，C の像は確かに C となり，l の像が l となるための条件は恒等変換または 180° 回転変換となることである

から，

$$(\cos\theta,\ \sin\theta) = (1,\ 0),\ (-1,\ 0)$$

(ii) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ のとき

A は直線 $x\sin\dfrac{\theta}{2} - y\cos\dfrac{\theta}{2} = 0$ に関する対称変換を表すから，C の像は確かに C となり，l の像が l となるための条件は対称軸が l に一致するか l と垂直となることであるから，

$$\left(\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\ \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\mp\frac{2}{\sqrt{5}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\quad (\text{複号同順})$$

2 倍角の公式より

$$(\cos\theta,\ \sin\theta) = \left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right),\ \left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$$

以上より，求める行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\quad (\text{答})$$