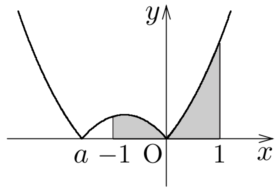
[**1**]　$g(x) = ax + 3,\quad f(x) - g(x) = x^2 + 3 - (ax + 3) = x(x - a)$

(1)　$a \leqq -1$ のとき

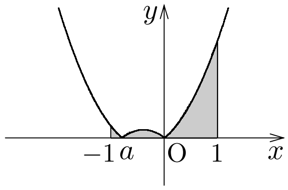


$$\begin{aligned} I(a) &= 3\int_{-1}^{1} |x(x-a)|\,dx \\ &= 3\int_{-1}^{0} (-x^2 + ax)\,dx + 3\int_{0}^{1} (x^2 - ax)\,dx \\ &= 3\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + 3\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2\right]_{0}^{1} \\ &= -3\left(\frac{1}{3} + \frac{a}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2}\right) = -3a \end{aligned}$$

$I(a)$ は $a \leqq -1$ において単調減少であるから，

最小値は $I(-1) = \underset{(1)(2)}{\boxed{\ 03\ }}$

(2)　$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき



$$\begin{aligned} I(a) &= 3\int_{-1}^{1} |x(x-a)|\,dx \\ &= 3\int_{-1}^{a} (x^2 - ax)\,dx + 3\int_{a}^{0} (-x^2 + ax)\,dx + 3\int_{0}^{1} (x^2 - ax)\,dx \\ &= 3\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2\right]_{-1}^{a} + 3\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2\right]_{a}^{0} + 3\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2\right]_{0}^{1} \\ &= 2 \times 3\left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right) - 3\left(-\frac{1}{3} - \frac{a}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2}\right) \\ &= \underset{(3)(4)}{\boxed{\ -1\ }}\,a^3 + \underset{(5)(6)}{\boxed{\ 00\ }}\,a + \underset{(7)(8)}{\boxed{\ 02\ }} \end{aligned}$$

$$I'(a) = -3a^2 \leqq 0$$

より，$I(a)$ は $-1 \leqq a \leqq 0$ において単調減少であるから，

最小値は $I(0) = \underset{(9)(10)}{\boxed{\ 02\ }}$，　最大値は $I(-1) = \underset{(11)(12)}{\boxed{\ 03\ }}$

[**2**] 1 回の試行において，

取り出した 2 個の玉の色が異なる確率は $\dfrac{2\times 2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{3}$

取り出した 2 個の玉の色が同じである確率は $\dfrac{2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{3}$

(1) ゲーム G_5 において，得点が 2^3 となるのは 2 回続けて異なる色の 2 個の玉を取り出し，3 回目に同じ色の 2 個の玉を取り出す場合であるから，

$$\text{得点が } 2^3 \text{ となる確率は } \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{\underset{}{\overset{(13)(14)}{\boxed{04}}}}{\underset{(15)(16)}{\boxed{27}}}$$

得点が 2^5 となるのは 4 回続けて異なる色の 2 個の玉を取り出す場合であるから，

$$\text{得点が } 2^5 \text{ となる確率は } \left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{\overset{(17)(18)}{\boxed{16}}}{\underset{(19)(20)}{\boxed{81}}}$$

(2) ゲーム G_n において

「得点が 2^{n-1} 以下となる確率が 0.99 以上」

$\iff$「得点が 2^n となる確率が 0.01 未満」

$$\iff \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}<\frac{1}{100}$$

$$\iff \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}>100 \iff (n-1)\log_2\frac{3}{2}>\log_2(2\times 5)^2$$

$$\iff n-1>\frac{2(1+\log_2 5)}{\log_2 3-1}=\frac{2\times(1+2.322)}{1.585-1}=\frac{6.644}{0.585}=11.3\cdots$$

$$\therefore\ n\geqq \boxed{13}\ (21)(22)$$

(3) ゲーム G_n における得点の期待値 E_n は

$$\begin{aligned}
E_n&=\sum_{k=1}^{n-1}2^k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{3}+2^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\
&=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}+2\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\\
&=\frac{2}{3}\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-1}{\frac{4}{3}-1}+2\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\\
&=4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-2=\underset{(23)(24)}{\boxed{03}}\left(\frac{\overset{(25)}{\boxed{4}}}{\underset{(26)}{\boxed{3}}}\right)^n+\underset{(27)(28)}{\boxed{-2}}
\end{aligned}$$

[**3**]　$\triangle$OAB の面積は

$$\frac{1}{2}|4\times 5-3\times 2|=\boxed{7}\ {\scriptstyle (29)}$$

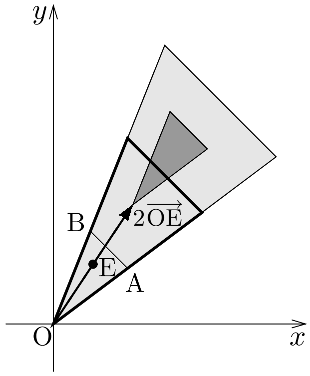
C は AB を 1 : 2 に内分するから，分点公式より

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+2}=\frac{2}{3}(4,\ 3)+\frac{1}{3}(2,\ 5)=\left(\frac{10}{3},\ \frac{11}{3}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=3\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$$\mathrm{D}\Big(\underset{(30)(31)}{\boxed{10}},\ \underset{(32)(33)}{\boxed{11}}\Big)$$

点 O に関して点 A と対称な点の座標は $\Big(\underset{(34)(35)}{\boxed{-4}},\ \underset{(36)(37)}{\boxed{-3}}\Big)$ であり，点 O に関して点 B と対称な点の座標は $\Big(\underset{(38)(39)}{\boxed{-2}},\ \underset{(40)(41)}{\boxed{-5}}\Big)$ である。



点 E を固定して，点 F を $\triangle$OAB の周および内部で動かすと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\,\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

を満たす点 P が描く図形は $\triangle$OAB を $2\,\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ だけ平行移動したものである。次に，点 E を $\triangle$ OABで動かすと，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=2\,\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ なる点 U が O, (8, 6), (4, 10) を頂点とする三角形の周および内部を動くから，S は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\leqq 3$$

なる点 P が描く図形であることがわかり，

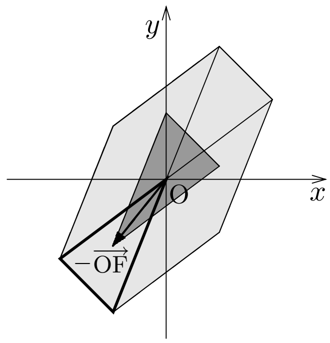
$$\text{面積が } 7\times 3^2=\underset{(42)(43)}{\boxed{63}}\ \text{である}\ \underset{(44)}{\boxed{3}}\ \text{角形}$$

をなす。

点 F を固定して，点 E を動かすと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

を満たす点 Q が描く図形は $\triangle$OAB を $-\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ だけ平行移動したものである。次に，点 F を $\triangle$OAB で動かすと，$\overrightarrow{\mathrm{OV}}=-\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ なる点 V が $\triangle$OAB を原点に関して対称移動させた三角形領域を動くから，T は $\triangle$OAB を 6 つ合わせたような



$$\text{面積が } 7\times 6=\underset{(45)(46)}{\boxed{42}}\ \text{である}\ \underset{(47)}{\boxed{6}}\ \text{角形}$$

をなす。

[4]

(1)　仮定より

$$A=(x^2-a)C+x+1,\quad B=(x^2-a)D+x\quad (C,\ D \text{ は } x \text{ の整式})$$

と表されるから，

$$\begin{aligned}AB&=(x^2-a)\{(x^2-a)CD+xC+(x+1)D\}+x(x+1)\\&=(x^2-a)\{(x^2-a)CD+xC+(x+1)D\}+x^2-a+x+a\\&=(x^2-a)\{(x^2-a)CD+xC+(x+1)D+1\}+x+a\end{aligned}$$

を x^2-a で割ったときの余りは

$x+a$　(答)

(2)　$x^{150}=(x-a+a)^{150}=\displaystyle\sum_{k=0}^{150}{}_{150}\mathrm{C}_k\,(x-a)^k a^{150-k}$

$=(x-a)Q_1+a^{150}$　(Q_1 は x の整式)

を $x-a$ で割ったときの余りは

a^{150}　(答)

(注) 剰余の定理を用いてもよい。

(3)　$$\begin{aligned}x^{150}=(x^2)^{75}&=(x^2-a+a)^{75}\\&=\sum_{k=0}^{75}{}_{75}\mathrm{C}_k\,(x^2-a)^k a^{75-k}\\&=(x^2-a)Q_2+a^{75}\quad (Q_2 \text{ は } x \text{ の整式})\end{aligned}$$

を x^2-a で割ったときの余りは

a^{75}　(答)

(4)　(3)の途中式より

$$x^{151}=x^{150}\cdot x=(x^2-a)\cdot xQ_2+a^{75}x\quad (Q_2 \text{ は } x \text{ の整式})$$

となるから，x^{151} を x^2-a で割ったときの余りは

$a^{75}x$　(答)

(5)　$$\begin{aligned}x^{151}=x(x^5)^{30}&=x(x^5-a+a)^{30}\\&=x\sum_{k=0}^{30}{}_{30}\mathrm{C}_k\,(x^5-a)^k a^{30-k}\\&=(x^5-a)Q_3+a^{30}x\quad (Q_3 \text{ は } x \text{ の整式})\end{aligned}$$

を x^5-a で割ったときの余りは

$a^{30}x$　(答)

(注) (1)の解答からもわかるように，「余りの積にだけ注目すればよい」ことが本質である。(1), (3), (4)の別解として，x^2-a で割ったときの余りを $bx+c$ とでもおき，$x=\pm\sqrt{a}$ を代入して $b,\ c$ についての連立方程式を導く解法も考えられる。

[**5**]

(1)　真数条件より

$$x > 0,\quad y > 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

であり,

$$3(\log_2 x - 1) + 1 = 3\log_2 x - 2 = \log_2 \frac{x^3}{4}$$

$$2(\log_2 x - 1) + 1 = 2\log_2 x - 1 = \log_2 \frac{x^2}{2}$$

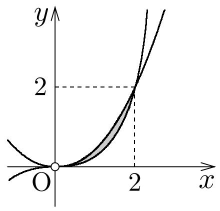
および (底) > 1 より，与えられた不等式は

$$\frac{1}{4}x^3 \leqq y \leqq \frac{1}{2}x^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

$x > 0$ のもとで

$$\frac{1}{4}x^3 \leqq \frac{1}{2}x^2 \iff x^2(x-2) \leqq 0 \iff 0 < x \leqq 2$$

であるから，①かつ② を図示することにより, D は次図の網目部分(境界については原点は含まず，それ以外の点は含む)となる。



(答)

(2)　点 $(x,\ y)$ が D 内を動くとき，$x \leqq 2$ かつ $y \leqq 2$ であるから,

$(x,\ y) = (2,\ 2)$ のとき $x + y$ は最大値 4　(答)

をとる。

(3)　$x - y = k$ とおくと,

$$y = x - k$$

は傾き 1，y 切片 $-k$ の直線を表し，D と共有点をもつときの k の最大値($-k$ は最小)が求めるものである。

$$\left(\frac{1}{4}x^3\right)' = \frac{3}{4}x^2 = 1 \text{ かつ } 0 < x \leqq 2$$

を解くと $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ であり，$y = x - k$ が

$$(x,\ y) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}},\ \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

における $y = \dfrac{1}{4}x^3$ の接線となるとき k は最大となるから,

$x - y$ の最大値は $\dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　(答)

[6]

(1)　座標平面上で，

A は原点を中心とする半径 $|k|$ の円の内部

B は放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-2k$ を境界として y 座標が大きい側の領域

を表すから，$A\cap B=\phi$ となるための条件は

$$|k|\leqq -2k \text{ かつ } k\neq 0 \qquad \therefore\ k<0 \quad (\text{答})$$

(2)　$A\subset B$ のとき，特に

$$-2k<0 \text{ すなわち } k>0$$

が必要である。$k>0$ のもとで，

$$A\subset B \iff y=\frac{1}{2}x^2-2k \text{ 上の任意の点} \left(t,\ \frac{1}{2}t^2-2k\right) \text{が } x^2+y^2\geqq k^2$$

$$\iff t^2+\left(\frac{1}{2}t^2-2k\right)^2 \text{ の最小値が } k^2 \text{ 以上}$$

ここで，

$$\begin{aligned} f(t)&=t^2+\left(\frac{1}{2}t^2-2k\right)^2\\ &=\frac{1}{4}t^4-(2k-1)t^2+4k^2\\ &=\frac{1}{4}\left\{t^2-2(2k-1)\right\}^2-(2k-1)^2+4k^2\\ &=\frac{1}{4}\left\{t^2-2(2k-1)\right\}^2+4k-1 \end{aligned}$$

と変形されるから，条件は $k>0$ のもとで

$$\begin{cases} 2(2k-1)\leqq 0 \text{ のとき} & f(0)=4k^2\geqq k^2\\ 2(2k-1)\geqq 0 \text{ のとき} & f\big(2(2k-1)\big)=4k-1\geqq k^2 \end{cases}$$

$4k^2\geqq k^2$ は $\left(0<k\leqq\dfrac{1}{2} \text{ のもとで}\right)$ 任意の実数 k に対して成り立ち，

$$4k-1\geqq k^2 \iff k^2-4k+1\leqq 0 \iff 2-\sqrt{3}\leqq k\leqq 2+\sqrt{3}$$

であるから，求める k の値の範囲は

$$0<k\leqq 2+\sqrt{3} \quad (\text{答})$$