$\boxed{1}$

問 1　H は直線 AB 上の点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= t(-3,\ -1,\ 1) + (1-t)(-1,\ 0,\ 0)\\ &= (-2t-1,\ -t,\ t)\quad (t\text{ は実数}) \qquad \cdots\cdots\ (*)\end{aligned}$$

と表される。

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (-2t-3,\ -t-3,\ t-3)$$

は $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,\ 1,\ -1)$ と垂直であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = 2(-2t-3) + 1\cdot(-t-3) - 1\cdot(t-3) = 0$$

$$-6t-6=0$$

$$\therefore\ t=-1$$

$(*)$に代入して，点 H の座標は

$$\mathrm{H}(1,\ 1,\ -1)\quad (答)$$

問 2　$n-1$ 回まで少なくとも一つ赤球を取り出して赤球を 1 球加え，n 回目に白球 2 球を取り出す確率が p_n である。

$$p_2 = \left(1-\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}\right)\cdot\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

$$p_3 = \left(1-\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}\right)\left(1-\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}\right)\cdot\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{10} = \frac{5}{10}p_2$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}p_n &= \frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{\frac{1}{2}n(n+1)-1}{\frac{1}{2}n(n+1)}\times\frac{1}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{n(n+1)-2}{(n+1)(n+2)}p_{n-1}\\ &= \frac{(n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}p_{n-1} = \frac{n-1}{n+1}p_{n-1}\end{aligned}$$

$$\therefore\ n(n+1)p_n = n(n-1)p_{n-1}$$

よって，$n(n+1)p_n$ は定数であるから

$$n(n+1)p_n = 2\cdot3\cdot p_2 = 2\cdot3\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ p_n = \frac{2}{3n(n+1)}\quad (答)$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_0^x f(y)\,dy + x^2\int_0^1 f(y)\,dy + 2x\int_0^1 yf(y)\,dy + \int_0^1 y^2 f(y)\,dy = x^2 + C$

$x=0$ を代入すると

$$\int_0^1 y^2 f(y)\,dy = C \qquad \cdots\cdots ①$$

であり,

$$A = \int_0^1 f(y)\,dy \qquad \cdots\cdots ②$$

$$B = \int_0^1 yf(y)\,dy \qquad \cdots\cdots ③$$

とおくと,

$$\int_0^x f(y)\,dy + Ax^2 + 2Bx = x^2$$

両辺を x で微分すると

$$f(x) + 2Ax + 2B = 2x$$

$$\therefore\ f(x) = 2(1-A)x - 2B \qquad \cdots\cdots ④$$

②, ④より

$$A = \Big[(1-A)y^2 - 2By\Big]_0^1 = (1-A) - 2B$$

$$\therefore\ B = \frac{1}{2} - A \qquad \cdots\cdots ⑤$$

③, ④より

$$B = \left[\frac{2}{3}(1-A)y^3 - By^2\right]_0^1 = \frac{2}{3}(1-A) - B$$

$$\therefore\ B = \frac{1}{3}(1-A) \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤かつ⑥より

$$A = \frac{1}{4},\quad B = \frac{1}{4}$$

④に代入して

$$f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \quad \text{(答)}$$

①より

$$C = \int_0^1 y^2\left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}\right)dy = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{24} \quad \text{(答)}$$

3　底の変換公式を用いると，与えられた不等式は

$$\frac{\log_2 y}{\log_2 x}+\frac{\log_2 x}{\log_2 y}>2+\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{\log_2 y}$$

これを同値変形すると

$$\frac{(\log_2 y)^2+(\log_2 x)^2}{\log_2 x\log_2 y}>\frac{2\log_2 x\log_2 y+1}{\log_2 x\log_2 y}$$

$$\frac{(\log_2 x)^2-2\log_2 x\log_2 y+(\log_2 y)^2-1}{\log_2 x\log_2 y}>0$$

$$\frac{(\log_2 x-\log_2 y)^2-1}{\log_2 x\log_2 y}>0$$

$$\frac{(\log_2 x-\log_2 y+1)(\log_2 x-\log_2 y-1)}{\log_2 x\log_2 y}>0$$

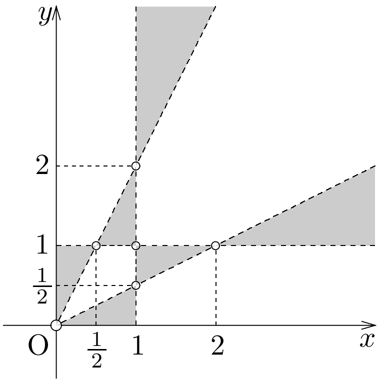
$$\log_2 x\log_2 y\,(\log_2 x-\log_2 y+1)(\log_2 x-\log_2 y-1)>0$$

$$\log_2 x\log_2 y\,(\log_2 2x-\log_2 y)\left(\log_2\frac{1}{2}x-\log_2 y\right)>0$$

(底) $=2>1$ より

$$(x-1)(y-1)(2x-y)\left(\frac{1}{2}x-y\right)>0$$

$x>0$，$x\neq 1$，$y>0$，$y\neq 1$ のもとで図示すると，次図の網目部分(境界を含まない)となる。



(答)

$\boxed{4}$　$\angle\mathrm{AOB} = \theta\ (0 < \theta < \pi)$ とおくと,

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin\theta$$

$$\triangle\mathrm{OBE} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OE}\cdot|\sin 3\theta|$$

$\mathrm{OA} = \mathrm{OC} = \mathrm{OE}$ より

$$\triangle\mathrm{OAB} : \triangle\mathrm{OBE} = \sin\theta : |\sin 3\theta| = 2 : 3$$

3 倍角の公式 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ および $\sin\theta > 0$ より

$$1 : |3 - 4\sin^2\theta| = 2 : 3$$

$$3 - 4\sin^2\theta = \pm\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ \sin^2\theta = \frac{3}{8}\ \text{または}\ \frac{9}{8}$$

$0 < \sin\theta < 1$ より

$$\sin\angle\mathrm{AOB} = \sin\theta = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}\quad (\text{答})$$

$\boxed{5}$　1 から p^n までの整数の中で，p^k で割り切れて p^{k+1} で割り切れないものは

$k \leqq n-1$ のとき $p^{n-k} - p^{n-k-1}$ 個,

$k = n$ のとき 1 個

であるから，$(p^n)!$ を p が割る回数は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} k(p^{n-k} - p^{n-k-1}) + n \cdot 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot p^{n-k} - \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot p^{n-k-1} + n \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot p^{n-k} - \sum_{j=2}^{n} (j-1) \cdot p^{n-j} + n \\
&= 1 \cdot p^{n-1} + \sum_{k=2}^{n-1} \{k - (k-1)\} p^{n-k} - (n-1) \cdot 1 + n \\
&= p^{n-1} + \sum_{k=2}^{n-1} p^{n-k} + 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} \\
&= \frac{p^n - 1}{p - 1} \quad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(注)　一般に，自然数 n に対して，$n!$ を素数 p が割る回数は

$$\sum_{k=1}^{N} \left[\frac{n}{p^k} \right] \quad (N \text{ は } p^N \leqq n < p^{N+1} \text{ を満たす整数})$$

と表される。この事実を認めれば，直ちに

$$\sum_{k=1}^{n} p^{n-k}$$

が得られるが，根拠の説明がないと得点できないと思われる。