$\boxed{1}$

問 1　P は辺 BC 上の点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= t(3,\ 2,\ 0) + (1-t)(0,\ 2,\ 0) \\ &= (3t,\ 2,\ 0) \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

と表され，

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = (3t,\ 2,\ -a)$$

は平面 OEG に垂直であるから，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}} = 3\cdot 3t + 0\cdot 2 + a\cdot(-a) = 0 & \cdots\cdots ② \\ \overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}} = 0\cdot 3t + 2\cdot 2 + a\cdot(-a) = 0 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

③ および $a > 0$ より

$$a = 2 \quad (\text{答})$$

これと ②より

$$t = \frac{4}{9} \quad (0 \leqq t \leqq 1 \text{ を満たす})$$

①より

$$\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 2,\ 0\right) \quad (\text{答})$$

問 2　$n-1$ 回まで少なくとも一つ赤球を取り出して赤球を 1 球加え，n 回目に白球 2 球を取り出す確率が p_n である。

$$p_2 = \left(1 - \frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}\right)\cdot\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

$$p_3 = \left(1 - \frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}\right)\left(1 - \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}\right)\cdot\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{10} = \frac{5}{10}p_2$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}p_n &= \frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{\frac{1}{2}n(n+1)-1}{\frac{1}{2}n(n+1)}\times\frac{1}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+1)-2}{(n+1)(n+2)}p_{n-1} \\ &= \frac{(n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}p_{n-1} = \frac{n-1}{n+1}p_{n-1}\end{aligned}$$

$$\therefore\ n(n+1)p_n = n(n-1)p_{n-1}$$

よって，$n(n+1)p_n$ は定数であるから

$$n(n+1)p_n = 2\cdot 3\cdot p_2 = 2\cdot 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ p_n = \frac{2}{3n(n+1)} \quad (\text{答})$$

$\boxed{2}$ $\angle \mathrm{A_1OA_2} = \theta\ (0 < \theta < \pi)$ とおくと，

$$\triangle \mathrm{OA_2A_5} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA_2}\cdot \mathrm{OA_5}\cdot |\sin 3\theta|$$
$$\triangle \mathrm{OA_1A_2} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA_1}\cdot \mathrm{OA_2}\cdot \sin\theta$$

$\mathrm{OA_1} = \mathrm{OA_3} = \mathrm{OA_5}$， $\mathrm{OA_2} = \mathrm{OA_4}$ より

$$\frac{\triangle \mathrm{OA_2A_5}}{\triangle \mathrm{OA_1A_2}} = \frac{|\sin 3\theta|}{\sin\theta}$$

3 倍角の公式および $\sin\theta > 0$ より

$$\frac{\triangle \mathrm{OA_2A_5}}{\triangle \mathrm{OA_1A_2}} = |3 - 4\sin^2\theta|$$

$0 < \sin^2\theta \leqq 1$ より

$$-1 \leqq 3 - 4\sin^2\theta < 3$$

であるから，$|3 - 4\sin^2\theta|$ が正の整数になるとすれば

$$3 - 4\sin^2\theta = -1,\ 1,\ 2$$
$$\therefore\ \sin^2\theta = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$$

$0 < \theta < \pi$ を考えて

$$\sin\theta = 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}$$
$$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{6}\pi \quad \text{(答)}$$

3 底の変換公式を用いると，与えられた不等式は

$$\frac{\log_2 y}{\log_2 x}+\frac{\log_2 x}{\log_2 y}>2+\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{\log_2 y}$$

これを同値変形すると

$$\frac{(\log_2 y)^2+(\log_2 x)^2}{\log_2 x\log_2 y}>\frac{2\log_2 x\log_2 y+1}{\log_2 x\log_2 y}$$

$$\frac{(\log_2 x)^2-2\log_2 x\log_2 y+(\log_2 y)^2-1}{\log_2 x\log_2 y}>0$$

$$\frac{(\log_2 x-\log_2 y)^2-1}{\log_2 x\log_2 y}>0$$

$$\frac{(\log_2 x-\log_2 y+1)(\log_2 x-\log_2 y-1)}{\log_2 x\log_2 y}>0$$

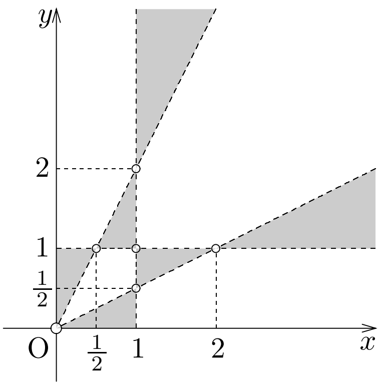
$$\log_2 x\log_2 y\,(\log_2 x-\log_2 y+1)(\log_2 x-\log_2 y-1)>0$$

$$\log_2 x\log_2 y\,(\log_2 2x-\log_2 y)\left(\log_2\frac{1}{2}x-\log_2 y\right)>0$$

(底) $=2>1$ より

$$(x-1)(y-1)(2x-y)\left(\frac{1}{2}x-y\right)>0$$

$x>0$, $x\neq 1$, $y>0$, $y\neq 1$ のもとで図示すると，次図の網目部分(境界を含まない)となる。



(答)

$\boxed{4}$

$$ad - bc = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ${x_2}^2 + {y_2}^2 = 1$ より

$$a^2 + c^2 = 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

ケーリー・ハミルトンの定理より (①も考えて)

$$A^2 - (a+d)A + E = O \qquad \cdots\cdots ③$$

(E は単位行列, O は零行列)

$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \left\{(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - E\right\}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ${x_3}^2 + {y_3}^2 = 1$ より

$${x_3}^2 + {y_3}^2 = \{a(a+d) - 1\}^2 + c^2(a+d)^2 = 1$$
$$(a^2 + c^2)(a+d)^2 - 2a(a+d) = 0$$

①より

$$(a+d)^2 - 2a(a+d) = 0$$
$$(a+d)(a+d-2a) = 0 \qquad \therefore\ d = \pm a$$

1°　$d = a$ のとき

①より

$$a^2 - bc = 1 \qquad \cdots\cdots ④$$

② − ④ より

$$c^2 + bc = c(c+b) = 0 \qquad \therefore\ c = 0 \text{ または } c = -b$$

(i)　$c = 0$ のとき, ②より

$$a = d = \pm 1 \qquad \therefore\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$A^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$ とすると

$$A^{k+1} = A^kA = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^kb \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$$

となるから, 任意の自然数 n に対して

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

であり,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n-1} & (n-1)a^{n-2}b \\ 0 & a^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\therefore\ {x_n}^2 + {y_n}^2 = (a^{n-1})^2 = 1$$

(ii)　$c = -b$ のとき, ②より

$$a = \cos\theta,\quad c = \sin\theta \quad (\theta \text{ は実数})$$

とおくことができて,

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

は原点のまわりの $-\theta$ 回転を表すから，${x_1}^2+{y_1}^2=1^2+0^2=1$ よりつねに

$${x_n}^2+{y_n}^2=1$$

である。

2°　$d=-a$ すなわち $a+d=0$ のとき

③より

$$A^2=-E$$

であるから，

$$\begin{pmatrix} x_{2n} \\ y_{2n} \end{pmatrix}=(-E)^{n-1}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{2n+1} \\ y_{2n+1} \end{pmatrix}=(-E)^{n-1}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}=(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

${x_2}^2+{y_2}^2={x_3}^2+{y_3}^2=1$ より

$${x_{2n}}^2+{y_{2n}}^2=1,\quad {x_{2n+1}}^2+{y_{2n+1}}^2=1$$

となるから，${x_1}^2+{y_1}^2=1^2+0^2=1$ とあわせて，すべての自然数 n に対して

$${x_n}^2+{y_n}^2=1$$

が成り立つ。

以上により，題意は示された。　(おわり)

$\boxed{5}$　1 から p^n までの整数の中で，p^k で割り切れて p^{k+1} で割り切れないものは

$k \leqq n-1$ のとき $p^{n-k}-p^{n-k-1}$ 個,

$k=n$ のとき 1 個

であるから，$(p^n)!$ を p が割る回数は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} k(p^{n-k}-p^{n-k-1})+n\cdot 1\\
&=\sum_{k=1}^{n-1} k\cdot p^{n-k}-\sum_{k=1}^{n-1} k\cdot p^{n-k-1}+n\\
&=\sum_{k=1}^{n-1} k\cdot p^{n-k}-\sum_{j=2}^{n}(j-1)\cdot p^{n-j}+n\\
&=1\cdot p^{n-1}+\sum_{k=2}^{n-1}\{k-(k-1)\}p^{n-k}-(n-1)\cdot 1+n\\
&=p^{n-1}+\sum_{k=2}^{n-1} p^{n-k}+1\\
&=\sum_{k=1}^{n} p^{n-k}\\
&=\frac{p^n-1}{p-1}\quad (答)
\end{aligned}$$

(注)　一般に，自然数 n に対して，$n!$ を素数 p が割る回数は

$$\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{n}{p^k}\right]\quad (N \text{ は } p^N \leqq n < p^{N+1} \text{ を満たす整数})$$

と表される。この事実を認めれば，直ちに

$$\sum_{k=1}^{n} p^{n-k}$$

が得られるが，根拠の説明がないと得点できないと思われる。

$\boxed{6}$　曲線 $r = 1 + \cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を直交座標系で表示すると

$$\begin{cases} x = (1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = (1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\sin\theta\cos\theta + (1+\cos\theta)(-\sin\theta) \\ &= -2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta \\ &= -\sin 2\theta - \sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= -\sin\theta\sin\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + \cos\theta \\ &= \cos 2\theta + \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right) + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= (-\sin 2\theta - \sin\theta)^2 + (\cos 2\theta + \cos\theta)^2 \\ &= 2 + 2(\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta) \\ &= 2 + 2\cos(2\theta - \theta) \\ &= 2 \cdot \frac{1+\cos\theta}{2} \\ &= 4\cos^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

曲線 $r = 1 + \cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right) + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta \\ &= 2\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} \\ &= 4 \quad \text{(答)} \end{aligned}$$