1 (30 点)

次の各問にそれぞれ答えよ.

問 1 正の数 a に対して xyz 空間で $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(3, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(0, 0, a)$, $E(3, 0, a)$, $F(3, 2, a)$, $G(0, 2, a)$ を頂点とする直方体 OABC–DEFG を考える. D を通り, 3 つの頂点 O, E, G を含む平面に垂直な直線が辺 BC (両端を含む) と点 P で交わるとき, a の値と P の座標を求めよ.

問 2 白球と赤球の入った袋から 2 個の球を同時に取り出すゲームを考える. 取り出した 2 球がともに白球ならば「成功」でゲームを終了し, そうでないときは「失敗」とし, 取り出した 2 球に赤球を 1 個加えた 3 個の球を袋にもどしてゲームを続けるものとする. 最初に白球が 2 個, 赤球が 1 個袋に入っていたとき, $n-1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率を求めよ. ただし $n \geqq 2$ とする.

2 (35 点)

平面上に三角形 $\triangle OA_1A_2$ と点 A_3, A_4, A_5 を, $n = 1, 2, 3$ に対して $\triangle OA_nA_{n+1}$ と $\triangle OA_{n+1}A_{n+2}$ が辺 OA_{n+1} に関して対称になるようにとる. $\triangle OA_2A_5$ の面積が $\triangle OA_1A_2$ の面積の正の整数倍となるとき, $\angle A_1OA_2$ の値を求めよ.

3 (30 点)

x, y は $x \neq 1$, $y \neq 1$ をみたす正の数で, 不等式

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

をみたすとする. このとき x, y の組 (x, y) の範囲を座標平面上に図示せよ.

4 (35 点)

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $ad-bc=1$ をみたす行列(a, b, c, d は実数)とし，

正の整数 n に対して

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

により x_n, y_n を定める．$x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2=1$ ならばすべての n に対して $x_n^2+y_n^2=1$ であることを示せ．

5 (35 点)

p を素数，n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は p で何回割り切れるか．

6 (35 点)

極方程式 $r=1+\cos\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ．

問題は，このページで終わりである．