$\boxed{1}$ P は辺 AE を $s : 1-s$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OE}} \\ &= (1-s)(3,\ 0,\ 0) + s(3,\ 0,\ 4) \\ &= (3,\ 0,\ 4s)\end{aligned}$$

Q は辺 CG を $t : 1-t$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OG}} \\ &= (1-t)(0,\ 2,\ 0) + t(0,\ 2,\ 4) \\ &= (0,\ 2,\ 4t)\end{aligned}$$

線分 AC 上の点 R を

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= (1-r)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (0 \leqq r \leqq 1) \\ &= (1-r)(3,\ 0,\ 0) + r(0,\ 2,\ 0) \\ &= (3-3r,\ 2r,\ 0)\end{aligned}$$

と定め，

$$\overrightarrow{\mathrm{DR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = (3-3r,\ 2r,\ -4)$$

が平面 OPQ と垂直になる条件を考え，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DR}} = 3(3-3r) + 0\cdot 2r + 4s(-4) = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DR}} = 0\cdot(3-3r) + 2\cdot 2r + 4t(-4) = 0\end{cases}$$

$$\therefore\ \ r = 1 - \frac{16}{9}s = 4t \ \text{ かつ } \ 0 \leqq r \leqq 1$$

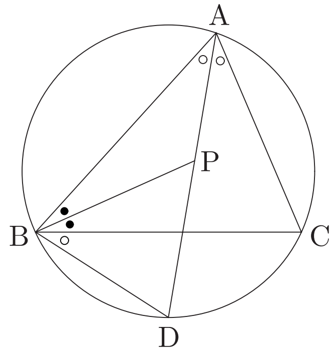
$r$ を消去すると

$$\frac{16}{9}s + 4t = 1 \ \text{ かつ } \ 0 \leqq 4t \leqq 1$$

$0 < s < 1,\ 0 < t < 1$ も考えて，求める条件は

$$\frac{16}{9}s + 4t = 1 \ \text{ かつ } \ s > 0 \ \text{ かつ } \ t > 0 \quad (\text{答})$$

$\boxed{2}$ **十分性**：P が $\triangle$ABC の内心とし，AP の延長と $\triangle$ABC の外接円との交点を D とする。円周角の性質より




$$\angle\mathrm{DBC} = \angle\mathrm{DAC} \qquad \cdots\cdots ①$$

P は内心であるから

$$\angle\mathrm{DAC} = \angle\mathrm{PAB} \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\angle\mathrm{CBP} = \angle\mathrm{ABP} \qquad \cdots\cdots ③$$

①, ③の辺々を加えて

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{DBP} &= \angle\mathrm{DBC} + \angle\mathrm{CBP}\\ &= \angle\mathrm{DAC} + \angle\mathrm{ABP}\end{aligned}$$

②より

$$\angle\mathrm{DBP} = \angle\mathrm{PAB} + \angle\mathrm{ABP}$$

$\triangle$ABP において

$$\angle\mathrm{PAB} + \angle\mathrm{ABP} = \angle\mathrm{DPB}$$

よって，$\angle\mathrm{DBP} = \angle\mathrm{DPB}$ となるから

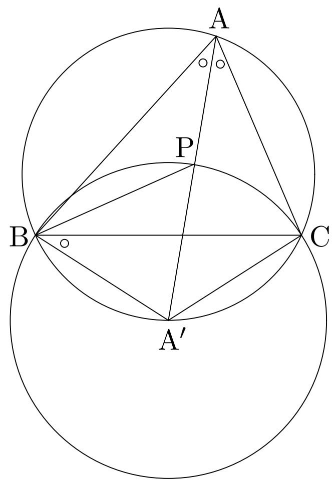
$$\mathrm{DB} = \mathrm{DP}$$

$\angle\mathrm{DAB} = \angle\mathrm{DAC}$ より DB = DC であるから

$$\mathrm{DB} = \mathrm{DP} = \mathrm{DC}$$

ゆえに，D を中心として B, C を通る円を描くと点 P を通るから，$\mathrm{D} = \mathrm{A}'$ である。$\mathrm{B}'$, $\mathrm{C}'$ についても同様であるから，A, B, C, $\mathrm{A}'$, $\mathrm{B}'$, $\mathrm{C}'$ は同一円周上にある。

**必要性**：$\triangle$ABC の外接円上の点 $\mathrm{A}'$ を中心として B, C を通る円を描き，線分 $\mathrm{AA}'$ との交点を P とする。$\mathrm{A}'\mathrm{B} = \mathrm{A}'\mathrm{C}$ より




$$\angle\mathrm{A}'\mathrm{AB} = \angle\mathrm{A}'\mathrm{AC}$$

円周角の性質より

$$\angle\mathrm{A}'\mathrm{AC} = \angle\mathrm{A}'\mathrm{BC} \qquad \cdots\cdots ④$$

であるから，

$$\angle\mathrm{A}'\mathrm{AB} = \mathrm{A}'\mathrm{BC}\ (= \alpha\text{とおく})$$

$\mathrm{A}'\mathrm{B} = \mathrm{A}'\mathrm{P}$ より

$$\angle\mathrm{A}'\mathrm{BP} = \angle\mathrm{A}'\mathrm{PB}\ (= \beta\text{とおく})$$

$\triangle$ABP において

$$\angle\mathrm{A}'\mathrm{PB} = \angle\mathrm{ABP} + \angle\mathrm{BAP}$$

$$\therefore\ \angle\mathrm{ABP} = \beta - \alpha$$

$\angle\mathrm{CBP} = \angle\mathrm{A}'\mathrm{BP} - \angle\mathrm{A}'\mathrm{BC} = \beta - \alpha$ より

$$\angle\mathrm{ABP} = \angle\mathrm{CBP}$$

よって，BP は $\angle$ABC の二等分線であり，④とあわせて，点 P は $\triangle$ABC の内心である。

(証明おわり)

**3**　$n$ 回の試行を終えたとき，番号 $n$ のカードが山の一番上にきているのは，

- $n-1$ 回目までのうち 1 回だけ一番上のカードを番号 $n$ のカードより上に入れ，他の回は下に入れる

または

- $n-1$ 回続けて番号 $n$ のカードが 1 つずつ上がり，$n$ 回目に一番上のカード (番号 $n$ のカード )を一番上に戻す

場合である。

番号 $n$ のカードが $k$ 回目に下から $k$ 番目にあり，一番上のカードを番号 $n$ カードより上に入れ，あとの $n-k$ 回は番号 $n$ のカードより下に入れる確率を $p_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\ n-1)$ とすると

$$\begin{aligned}p_k &= \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{k-1}{n}\cdot\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\\ &= \frac{(n-1)!}{n^n}(n-k)\quad (k=1\text{ のときも成立})\end{aligned}$$

求める確率 $P$ は

$$\begin{aligned}P &= \sum_{k=1}^{n-1}p_k+\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}\\ &= \frac{(n-1)!}{n^n}\sum_{k=1}^{n-1}p_k+\frac{(n-1)!}{n^n}\\ &= \frac{(n-1)!}{n^n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k+1\right)\\ &= \frac{(n-1)!}{n^n}\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}\\ &= \frac{(n-1)!}{2n^n}(n^2-n+2)\quad (\text{答})\end{aligned}$$

$\boxed{4}$
$$ad-bc=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}|=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}=1$ より

$$a^2+c^2=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

ケーリー・ハミルトンの定理より (①も考えて)

$$A^2-(a+d)A+E=O \qquad \cdots\cdots ③$$

($E$ は単位行列，$O$ は零行列)

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\left\{(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-E\right\}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}|=\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}=1$ より

$$x_2^2+y_2^2=\{a(a+d)-1\}^2+c^2(a+d)^2=1$$
$$(a^2+c^2)(a+d)^2-2a(a+d)=0$$

①より

$$(a+d)^2-2a(a+d)=0$$
$$(a+d)(a+d-2a)=0 \qquad \therefore\ d=\pm a$$

$1^\circ$　$d=a$ のとき

①より

$$a^2-bc=1 \qquad \cdots\cdots ④$$

② − ④ より

$$c^2+bc=c(c+b)=0 \qquad \therefore\ c=0 \text{ または } c=-b$$

(i)　$c=0$ のとき，②より

$$a=d=\pm 1 \qquad \therefore\ A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$A^k=\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$ とすると

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^kb \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$$

となるから，任意の自然数 $n$ に対して

$$A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

であり，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|=\sqrt{{x_n}^2+{y_n}^2}=\sqrt{a^{2n}}=1$$

(ii)　$c=-b$ のとき，②より

$$a=\cos\theta,\quad c=\sin\theta \quad (\theta \text{ は実数})$$

とおくことができて，

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

は原点のまわりの $-\theta$ 回転を表すから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\right|=1$ よりつねに

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right|=1$$

である。

$2^\circ$　$d=-a$ すなわち $a+d=0$ のとき

③より

$$A^2=-E$$

であるから，

$$\begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{pmatrix}=(-E)^{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{2n} \\ y_{2n} \end{pmatrix}=(-E)^{n-1}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\right|=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}=1$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}\right|=\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}=1$ より

$${x_{2n-1}}^2+{y_{2n-1}}^2=1,\quad {x_{2n}}^2+{y_{2n}}^2=1$$

となるから，すべての自然数 $n$ に対して

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right|=\sqrt{{x_n}^2+{y_n}^2}=1$$

が成り立つ。

以上により，題意は示された。　　(おわり)

**5**　曲線 $C$ を直交座標系で表示すると

$$\begin{cases} x = (\cos\theta + 2)\cos\theta \\ y = (\cos\theta + 2)\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

$0 < \theta < \pi$ において，

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\sin\theta\cos\theta + (\cos\theta + 2)(-\sin\theta) \\ &= -2\sin\theta(\cos\theta + 1) < 0 \end{aligned}$$

より $x = (\cos\theta + 2)\cos\theta$ は狭義単調減少であるから，逆関数 $x \mapsto \theta$ を持ち，$y = (\cos\theta + 2)\sin\theta$ との合成を $f(x)$ とおくことにより，曲線 $C$ は関数 $y = f(x)$ のグラフとみなせる。この $f(x)$ を用いて $x = (\cos\theta + 2)\cos\theta$ により置換積分することにより，求める体積 $V$ は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{3} \pi f(x)^2\,dx \\ &= \pi\int_{\pi}^{0} (\cos\theta + 2)^2 \sin^2\theta \cdot \frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= -2\pi\int_{\pi}^{0} (\cos\theta + 2)^2 (\cos\theta + 1)\sin^3\theta\,d\theta \\ &= 2\pi\int_{\pi}^{0} (\cos\theta + 2)^2 (\cos\theta + 1)(1 - \cos^2\theta)(\cos\theta)'\,d\theta \\ &= 2\pi\int_{-1}^{1} (t + 2)^2 (t + 1)(1 - t^2)\,dt \\ &= -2\pi\int_{-1}^{1} (t^2 + 4t + 4)(t^3 + t^2 - t - 1)\,dt \\ &= -2\pi\int_{-1}^{1} (t^5 + 5t^4 + 7t^3 - t^2 - 8t - 4)\,dt \\ &= -4\pi\int_{0}^{1} (5t^4 - t^2 - 4)\,dt \\ &= -4\pi\left[t^5 - \frac{t^3}{3} - 4t\right]_0^1 \\ &= \frac{40}{3}\pi \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

**6** 
$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2} &= (a+b\sqrt{2}\,)^{n+1} \\ &= (a+b\sqrt{2}\,)(a+b\sqrt{2}\,)^{n} \\ &= (a+b\sqrt{2}\,)(a_n+b_n\sqrt{2}\,) \\ &= aa_n+2bb_n+(ba_n+ab_n)\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

ここで，$b_{n+1} \neq ba_n+ab_n$ であるとすれば，

$$\sqrt{2}=\frac{aa_n+2bb_n-a_{n+1}}{b_{n+1}-(ba_n+ab_n)}$$

が成り立ち，左辺は無理数，右辺は有理数となって矛盾するから，

$$b_{n+1}=ba_n+ab_n \qquad \cdots\cdots ②$$

このとき，①より

$$a_{n+1}=aa_n+2bb_n \qquad \cdots\cdots ③$$

整数は和，積について閉じているから，②，③より，$a_k$，$b_k$ が整数ならば $a_{k+1}$，$b_{k+1}$ も整数となり，$a_1=a$，$b_1=b$ はともに整数であるから，

すべての $n$ に対して $a_n$，$b_n$ は整数

である。

また，$a_1=a$ は奇数であり，$a_k$ が奇数であるとすれば

$aa_k$ は奇数，$2bb_k$ は偶数

であるから，③より $a_{k+1}$ は奇数となり，

すべての $n$ に対して $a_n$ は奇数

である。

(1) $a_2$，$b_2$ が共通の素因数 $p$ をもつとすれば，$a_2$ は奇数であるから

$$p \neq 2$$

であり，②より $b_2=2ab$ であるから

$$p\,|\,a \quad \text{または} \quad p\,|\,b$$

③より

$$a_2=a^2+2b^2$$

であるから，いずれの場合も $p\,|\,a$ かつ $p\,|\,b$ となり，$a$ と $b$ が互いに素であることに反する。よって，$a_2$ と $b_2$ は互いに素である。

(2) $k$ を2以上の整数とし，$n \leqq k$ に対して $a_n$ と $b_n$ は互いに素であるとする。

②，③より

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots ④$$

両辺に余因子行列をかけて

$$\begin{pmatrix} a & -2b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix}=(a^2-2b^2)\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

$a_{k+1}$ と $b_{k+1}$ が共通の素因数 $p$ をもつとすれば，

$$p\,|\,a^2-2b^2 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④においてケーリー・ハミルトンの定理より

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= \left\{ 2a\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} - (a^2-2b^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= 2a\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} - (a^2-2b^2)\begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$p\,|\,a_{k+1}$，$p\,|\,b_{k+1}$ および $p\,|\,a^2-2b^2$ より

$$p\,|\,2aa_k \text{ かつ } p\,|\,2ab_k$$

ここで，$p\,|\,a$ とすれば，$p\,|\,a^2-2b^2$ より $p\,|\,2b^2$ であり，$p$ が奇素数であることより $p\,|\,b$ となって $a$ と $b$ が互いに素であることに反する。よって，

$$p \nmid a$$

となるが，$p$ は奇素数であるから

$$p\,|\,a_k \text{ かつ } p\,|\,b_k$$

となり，$a_k$ と $b_k$ が互いに素であることに反する。したがって，$a_{k+1}$ と $b_{k+1}$ は共通の素因数 $p$ を持たず，互いに素である。

既に $n=1,\ 2$ のときは示されているので，数学的帰納法により

$$a_n \text{ と } b_n \text{ は互いに素}$$

であることが示された。　(おわり)