$\boxed{1}$

(1)　$\omega^3 = 1$ を用いて

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\omega^2 & -\omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\omega^2 & -\omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^4 - \omega & \omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\omega^2 & -\omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega^4 - \omega & \omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$2009 + 1 = 3 \times 670$ より，単位行列を E として

$$E + \sum_{n=1}^{2009} A^n = 670(E + A + A^2) = 670\begin{pmatrix} -\omega^2 + 1 & -\omega + 1 \\ -\omega^2 + 1 & -\omega + 1 \end{pmatrix}$$

$\omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0,\ \omega \neq 1$ より

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

であることを用いて

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 670 \times 2(-\omega^2 + 1 - \omega + 1) - 2 \\ &= 1340 \times (-\omega^2 - \omega - 1 + 3) - 2 \\ &= 1340 \times 3 - 2 = \boxed{4018}\ (ア) \end{aligned}$$

（注）ケーリー・ハミルトンの定理を用いて計算してもよい。なお，

$$\det(A - E) = \det\begin{pmatrix} -\omega^2 - 1 & -\omega \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

より $A - E$ は逆行列をもたないから，

$$A^n - E = (A - E)(A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + E)$$

を用いることはできない。

(2)　$$\frac{x_n}{x_n + 2n - 1} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+1} + 2n + 1} \iff x_n(x_{n+1} + 2n + 1) = x_{n+1}(x_n + 2n - 1)$$

$$\iff \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{2n-1}$$

この式が $n = 1,\ 2,\ \cdots,\ 1004$ に対して成り立つから，ある定数 a を用いて

$$x_n = a(2n - 1) \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots,\ 1004,\ 1005)$$

と表され，

$$2010 = \sum_{k=1}^{1005} a(2k - 1) = a \cdot \frac{1005}{2}(1 + 2009) = 1005^2 a$$

より

$$a = \frac{2}{1005}$$

よって，求める値は

$$x_{21} = \frac{2}{1005} \cdot (2 \cdot 21 - 1) = \boxed{\frac{82}{1005}}\ (イ)$$

(3) $k=\dfrac{1}{21}$，$f(x)=kx-\left\{1-(1-x)^k\right\}$ $(0 \leqq x<1)$ とおくと，$0<x<1$ のとき

$$f'(x)=k-k(1-x)^{k-1}=k\left\{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)^{1-k}\right\}<0$$

であるから，$f(x)$ は $0 \leqq x<1$ で狭義単調減少であり，

$$A-C=f\left(\frac{1}{2009}\right)<f(0)=0$$

$$\therefore\ A<C \qquad \cdots\cdots ①$$

二項定理より

$$\begin{aligned}(1+A)^{21}&=\left(1+\frac{1}{21\cdot 2009}\right)^{21}\\&=1+\frac{1}{2009}+{}_{21}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{21\cdot 2009}\right)^2+\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{21}\left(\frac{1}{21\cdot 2009}\right)^{21}\\&>1+\frac{1}{2009}=(1+B)^{21}\end{aligned}$$

であるから

$$1+A>1+B \qquad \therefore\ B<A \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②より

最大のものは $\underset{(ウ)}{\boxed{C}}$，最小のものは $\underset{(エ)}{\boxed{B}}$

(4) 見た目に区別のつかない 5 個の赤球と 14 個の白球を，赤球どうしが隣り合わないように一列に並べるのと同数であり，白球 14 個を一列に並べたときの両端と隙間 15ヶ所に赤球 5 個を別々に入れると考えて

$${}_{15}\mathrm{C}_5=\frac{15\times 14\times 13\times 12\times 11}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=\underset{(オ)}{\boxed{3003}}\text{ 個}$$

$\boxed{2}$

(1) O$(0,\ 0,\ 0)$, A$(a,\ b,\ 0)$ とおく。

直線 AN 上の点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{ON}} = (at,\ bt,\ 2(1-t)) \quad (t \text{ は実数})$$

と表される。P が球面 S との交点とすると

$$(at)^2 + (bt)^2 + (2-2t-1)^2 = 1$$
$$(a^2+b^2+4)t^2 - 4t = 0$$

P $\neq$ N のとき $t \neq 0$ であるから

$$t = \frac{4}{a^2+b^2+4}$$

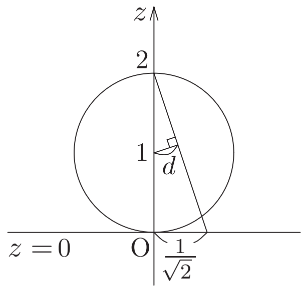
よって，求める交点は

$$\left(\frac{4a}{a^2+b^2+4},\ \frac{4b}{a^2+b^2+4},\ \frac{2a^2+2b^2}{a^2+b^2+4}\right) \quad (\text{答})$$

(2) xy 平面上で原点と直線 ℓ との距離は

$$\frac{|0+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

球の中心 $(0,\ 0,\ 1)$ と平面 L との距離を d とすると

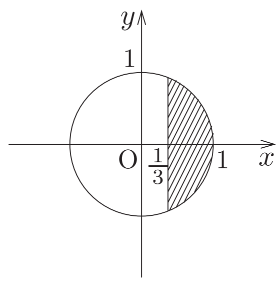


$$d : 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} : \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{2^3+1}}{\sqrt{2}}$$
$$= 1 : 3$$
$$\therefore\ d = \frac{1}{3}$$

S を表面とする球を平面 L によって 2 つに分けたときの小さい方の図形は，xy 平面上の領域

$$x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq \frac{1}{3},\ z = 0$$

を x 軸のまわりに回転させてできる立体と合同であるから，体積 V は



$$V = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \pi(1-x^2)\,dx$$
$$= \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{3}}^{1}$$
$$= \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{26}{27}\right) = \frac{28}{81}\pi \quad (\text{答})$$

$\boxed{3}$

$$\frac{\cos^n x+\cos^n y}{(\cos x+\cos y)^n}=\frac{1+\left(\dfrac{\cos y}{\cos x}\right)^n}{\left(1+\dfrac{\cos y}{\cos x}\right)^n}$$ であることを考え，

$$t=\frac{\cos y}{\cos x},\quad f(t)=\frac{1+t^n}{(1+t)^n}\quad (t>0)$$

とおく。

$$\begin{aligned}\frac{\cos 2y}{\cos 2x}-\frac{\cos y}{\cos x}&=\frac{\cos x\cos 2y-\cos 2x\cos y}{\cos 2x\cos x}\\&=\frac{\cos x(2\cos^2 y-1)-(2\cos^2 x-1)\cos y}{\cos 2x\cos x}\\&=\frac{(2\cos x\cos y+1)(\cos y-\cos x)}{\cos 2x\cos x}\\&=\frac{(2\cos x\cos y+1)(t-1)\cos x}{\cos 2x\cos x}\qquad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{nt^{n-1}(1+t)^n-(1+t^n)\cdot n(1+t)^{n-1}}{(1+t)^{2n}}\\&=\frac{n(1+t)^{n-1}\{t^{n-1}(1+t)-(1+t^n)\}}{(1+t)^{2n}}\\&=\frac{n(1+t)^{n-1}(t^{n-1}-1)}{(1+t)^{2n}}\end{aligned}$$

$t>0$ のもとで，

$$f'(t)>0\iff t^{n-1}>1\iff t>1$$

であるから，

t	(0)		1		$(+\infty)$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	極小	↗	

$\cdots\cdots$ ②

(i) $t=\dfrac{\cos y}{\cos x}<1$ のとき

①および $0<x<\dfrac{\pi}{4}$，$0<y<\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\frac{\cos 2y}{\cos 2x}<\frac{\cos y}{\cos x}\ (<1)$$

であり，②より $f(t)$ は狭義単調減少であるから

$$f\left(\frac{\cos 2y}{\cos 2x}\right)>f\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)$$

(ii)　$t=\dfrac{\cos y}{\cos x}=1$ のとき

①および $\cos x>0$，$\cos y>0$ より

$$\frac{\cos 2y}{\cos 2x}=\frac{\cos y}{\cos x},\quad f\left(\frac{\cos 2y}{\cos 2x}\right)=f\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)$$

(iii)　$t=\dfrac{\cos y}{\cos x}>1$ のとき

① および $0<x<\dfrac{\pi}{4}$，$0<y<\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\frac{\cos 2y}{\cos 2x}>\frac{\cos y}{\cos x}\ (>1)$$

であり，②より $f(t)$ は狭義単調増加であるから

$$f\left(\frac{\cos 2y}{\cos 2x}\right)>f\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)$$

$0<x<\dfrac{\pi}{4}$，$0<y<\dfrac{\pi}{4}$ より

$$t=\frac{\cos y}{\cos x}=1 \iff \cos x=\cos y \iff x=y$$

であるから，以上の議論をまとめると

$$\begin{cases} x=y \text{ のとき} & \dfrac{\cos^n x+\cos^n y}{(\cos x+\cos y)^n}=\dfrac{\cos^n 2x+\cos^n 2y}{(\cos 2x+\cos 2y)^n} \\ x\neq y \text{ のとき} & \dfrac{\cos^n x+\cos^n y}{(\cos x+\cos y)^n}<\dfrac{\cos^n 2x+\cos^n 2y}{(\cos 2x+\cos 2y)^n} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

(注)　$x=y$ のとき

$$\frac{\cos^n x+\cos^n y}{(\cos x+\cos y)^n}=\frac{\cos^n 2x+\cos^n 2y}{(\cos 2x+\cos 2y)^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

$\boxed{4}$ 集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ の奇数全体からなる部分集合を S_1，4 で割り切れない偶数全体からなる部分集合を S_2，4 の倍数全体からなる部分集合を S_0 とする。特に，

$$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\} = S_0 \cup S_1 \cup S_2,$$
$$S_0 \cap S_1 = \phi,\quad S_0 \cap S_2 = \phi,\quad S_1 \cap S_2 = \phi$$

である。

(1) $m \in M \Longrightarrow 2m \notin M$ をみたすような S_0 の部分集合 M のうちで $g(M)$ が最大のものを M_0 とし，

$$M' = M_0 \cup S_1$$

とおく。

n が 4 の倍数のとき

$$S_0 = \left\{4\cdot 1,\ 4\cdot 2,\ \cdots,\ 4\cdot\frac{n}{4}\right\}$$

であるから，M_0 の定め方より

$$g(M_0) = f\left(\frac{n}{4}\right)$$

$M_0 \cap S_1 = \phi$ より

$$g(M') = g(S_1) + g(M_0) = \frac{n}{2} + f\left(\frac{n}{4}\right)$$

$m \in S_1 \Longrightarrow 2m \in S_2 \Longrightarrow 2m \notin M'$ より

$$f(n) \geqq g(M')$$

であるから

$$f(n) \geqq \frac{n}{2} + f\left(\frac{n}{4}\right)$$

(証明おわり)

(2) $f(n) = g(M)$ となる部分集合 M を 3 つの集合の和集合

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_0 \quad (M_1 \subset S_1,\ M_2 \subset S_2,\ M_0 \subset S_0)$$

で表すことができる。$m \in M_1 \Longrightarrow 2m \notin M \Longrightarrow 2m \notin M_2$ の対偶をとると

$$2m \in M_2 \Longrightarrow m \notin M_1$$

であるから

$$g(M_1) + g(M_2) \leqq g(S_1) = \frac{n}{2}$$

n が 4 の倍数のとき

$$g(M_0) \leqq f\left(\frac{n}{4}\right)$$

であるから，

$$f(n) = g(M_1) + g(M_2) + g(M_0) \leqq \frac{n}{2} + f\left(\frac{n}{4}\right)$$

(証明おわり)

(3)　(1), (2) より

$$n \text{ が } 4 \text{ の倍数のとき}\quad f(n) = \frac{n}{2} + f\left(\frac{n}{4}\right)$$

であるから,

$$\begin{aligned} f(3\cdot 2^{125}) &= 3\cdot 2^{124} + f(3\cdot 2^{123}) \\ &= 3\cdot 2^{124} + 3\cdot 2^{122} + f(3\cdot 2^{121}) \\ &= 3\cdot 2^{124} + 3\cdot 2^{122} + \cdots + 3\cdot 2^{2} + f(3\cdot 2) \\ &= 3\cdot(4^{62} + 4^{61} + \cdots + 4) + f(6) \\ &= (4-1)\cdot(4^{62} + 4^{61} + \cdots + 4 + 1 - 1) + f(6) \\ &= (4^{63} - 1) - 3 + f(6) \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

ここで，$f(6)$ について考えると，$M = \{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$ は条件 $m \in M \implies 2m \notin M$ をみたすから

$$f(6) \geqq 4$$

$f(6) \geqq 5$ とすると $\{1,\ 2\}$ と $\{3,\ 6\}$ の一方は条件をみたす部分集合(の部分集合)ということになって矛盾するから

$$f(6) \leqq 4$$

$f(6) \geqq 4$ かつ $f(6) \leqq 4$ より

$$f(6) = 4 \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②より

$$f(3\cdot 2^{125}) = (4^{63} - 1) - 3 + 4 = 4^{63} = 2^{126} \quad \text{(答)}$$