

□1 (行列の和・差・スカラー倍)

(1) $3\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ を計算せよ。

(2) $2A + 3B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $3A - B = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$ を満たす2次正方行列 A , B を求めよ。

□2 (行列の積)

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}$$

が $AB = BA$ を満たすとき, x, y, z の値を求めよ。

(2) 任意の2次正方行列との積が交換可能であるような行列を求めよ。

3 (逆行列)

- (1) 正方行列 A が $A^2 + A - 2E = O$ を満たすとき, 行列 A は逆行列をもつかどうか, 理由をつけて答えよ。ただし, E は単位行列, O は零行列を表す。
- (2) 正方行列 A が零因子であるとき, 行列 A は逆行列をもたないことを示せ。

4 (行列式)

A, B を2次の正方行列とする。

- (1) A が逆行列をもつための必要十分条件は $\det A \neq 0$ であることを示せ。
- (2) $A, A+E, A-E$ の少なくとも1つは逆行列をもつことを示せ。ただし, E は2次の単位行列である。
- (3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ に逆行列があれば求めよ。
- (4) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ が成り立つことを示せ。

5 (ケーリー・ハミルトンの定理)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

- (1) $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ が成り立つことを示せ。
- (2) $A^2 - 3A + 2E = O$ を満たすとき, $a+d$ および $ad-bc$ を求めよ。
- (3) $A^3 = O$ ならば $A^2 = O$ であることを示せ。

6 (行列多項式)

正方行列 A が $A^2 - 3A + 2E = O$ (E は単位行列, O は零行列) を満たすとき, A^n (n は自然数) を $\alpha_n A + \beta_n E$ の形に表せ。ただし, α_n, β_n はスカラーとする。

7 (べき零行列)

n を自然数とする。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, A^n を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$ および $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ を求めよ。

8 (固有値, 固有ベクトル)

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $A \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ を満たす (x, y) の組を求めよ。

(2) A^n を求めよ。ただし, n は自然数とする。

9 (1次変換の定義)

座標平面上の変換 $f: (x, y) \mapsto (x', y')$ について, 次の2つの条件(i), (ii)は同値であることを示せ。

(i) ある2次の正方行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表される。

(ii) 座標平面上の任意のベクトル $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, および任意の実数 s, t に対して

$$f(s\vec{u} + t\vec{v}) = sf(\vec{u}) + tf(\vec{v})$$

が成り立つ。

10 (点の移動)

2次の正方行列 A に対して, A の表す1次変換により点 $(1, 0)$ が点 $(2, 1)$ に移され, A^2 の表す1次変換により点 $(1, 0)$ が点 $(7, 4)$ に移されるとき, 次の各点は A の表す1次変換 f によりどの点に移されるか。

- (1) $(2, 1)$
- (2) $(0, 1)$
- (3) $(3, 5)$

11 (線型性の活用)

座標平面上に原点 O を中心とする正六角形 $ABCDEF$ があり, 1 次変換 f が

$$f(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OE}, \quad f(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC}$$

を満たすとき,

(1) $f(\overrightarrow{OC})$ を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} を用いて表せ。

(2) 任意のベクトル \vec{p} に対して

$$f(f(\vec{p})) - f(\vec{p}) = \vec{p}$$

が成り立つことを示せ。

12 (合成変換, 逆変換)

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とし, 1 次変換 g による点 $(2, 1)$ の像が

$(0, 2)$, 点 $(1, 2)$ の像が $(-3, 4)$ であるとする。 $f \circ g$ および $g \circ f$ の表現行列をそれぞれ求めよ。

(2) x 軸に関する対称変換と y 軸に関する対称変換の合成は, どのような変換か。

(3) 1 次変換 f が逆変換 f^{-1} をもつとき, f^{-1} も 1 次変換であることを証明せよ。

(4) (1)において g は逆変換をもつか。もつならば, g^{-1} の表現行列を求めよ。

(5) 1 次変換 f が逆変換 f^{-1} をもつならば, 1 次独立なベクトル \vec{u} , \vec{v} に対して, $f(\vec{u})$ と $f(\vec{v})$ も 1 次独立であることを示せ。

13 (直線の像, 不動直線)

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ の表す1次変換を f とするとき,

- (i) f による直線 $2x - y + 3 = 0$ の像
- (ii) f による直線 $5x + 2y - 1 = 0$ の像
- (iii) f により点 $(1, -2)$ に移される図形

をそれぞれ求めよ。

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ で表される1次変換による直線 $2x - y + 3 = 0$ の像を求めよ。

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ によって表される1次変換によって自分自身に移される直線をすべて求めよ。

14 (いろいろな図形の像)

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ で表される1次変換を f とするとき,

- (i) 全平面の f による像
- (ii) 放物線 $y = x^2$ の f による像
- (iii) 円 $x^2 + y^2 = 1$ の f による像

をそれぞれ求めよ。

(2) 行列 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ で表される1次変換 g によって, 領域 $2y - x \geq 0, 3x - y \geq 0$ はどのような図形に移されるか。

15 (回転変換)

(1) 原点のまわりに θ だけ回転する変換は、行列 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ で表される1次変換であることを証明せよ。

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^{10}$ を求めよ。

(3) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の表す1次変換を f とするとき、

(i) 直線 $x = 1$ の f による像

(ii) 円 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ の f による像

をそれぞれ求めよ。

(4) 曲線 $x^2 - xy + y^2 = 1$ を図示せよ。

16 (対称変換)

原点を通り、ベクトル $(\cos \theta, \sin \theta)$ に平行な直線 l に関する対称変換 f は1次変換であることを示し、 f の表現行列を求めよ。

① 確認：数を長方形状に並べて括弧でくくったものを行列といい、横の並びを上から順に第1行，第2行， \cdots ，縦の並びを左から順に第1列，第2列， \cdots という。また，行列の括弧内に書かれたそれぞれの数を成分といい，第 i 行と第 j 列の交差する場所にある成分を (i, j) 成分という。(そのまま i 行 j 列の成分と言ってもよい。) m 行 n 列の行列を $m \times n$ 行列といい，行数と列数が等しい行列を正方行列という。行数と列数の組によって行列の型を表す。

行列は多次元空間のあいだの多変数写像を表現するためのもので，単に数を並べてあるだけでなく演算が定義されることに意味がある。和，差，スカラー倍はベクトルとして定義したものが写像の表現と一致する。行列が多変数の処理を簡単にする道具であることを考えると，(2)のような場合には， $2A + 3B = X$ ， $3A - B = Y$ より A ， B を X ， Y で表してから成分を代入する方が効果的である。

解答：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 3 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ -15 & 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 & -14 \\ 12 & -8 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 6 + (-2) - 4 & (-9) + 4 - 5 & 3 + (-14) - 6 \\ (-15) + 12 - 1 & 6 + (-8) - 2 & (-3) + 6 - 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -10 & -17 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & A = \frac{1}{11}(2A + 3B) + \frac{3}{11}(3A - B), \quad B = \frac{3}{11}(2A + 3B) - \frac{2}{11}(3A - B) \text{ より} \\
 & A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{11} \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ -5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{答}) \\
 & B = \frac{3}{11} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{11} \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ -5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

2 確認：行列は多次元空間における写像を表現するものであるから，積の演算は写像の合成から自然に定義されるはずである。定義の理解のため，最も簡単な場合(2次元の線型変換 → 9)で演算の成り立ちを確認してみよう。(和，差，スカラー倍については各自に任せる。)

定義域も値域も座標平面である写像で最も簡単なものは

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

と表される線形変換である。これは1変数関数の場合の $y = ax$ にあたるもので，変数が1つ増えただけでこれだけ複雑になるのは驚きである。そこで，1変数の場合の気軽さで扱うために，その写像を $y = ax$ をまねて形式的に

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表す。このルールだけを頼りにして合成写像がどうなるかを確認してみると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} px + qy \\ rx + sy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(px + qy) + b(rx + sy) \\ c(px + qy) + d(rx + sy) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ap + br)x + (aq + bs)y \\ (cp + dr)x + (cq + ds)y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はじめから積の結合法則を認めるならば，縦ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を介さず，

$$1 \text{ 列目を } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}, \quad 2 \text{ 列目を } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$$

と定めているのと同じである。

一般の場合は，左の行列の第 i 行と右の行列の第 j 列の内積

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

を (i, j) 成分とする行列を積と定めればよいことになり，左の行列の列数と右の行列

の行数が等しいことが、積が定義できるための条件である。

(1)で x, y, z の値が定まる(任意でない)ということは、行列の積が一般には交換可能でない(非可換である)ことを意味する。(2)では、はじめから必要十分で論じるのは難しいので、特別な行列の場合を考えて必要条件から導くことがポイントである。

解答：

$$(1) \quad AB = \begin{pmatrix} x & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & y \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{z}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{y}{2} \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}$$

成分を比べると

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{y}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{z}{2} = z \end{cases} \quad \therefore x = \frac{1}{2}, \quad y = z = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{答})$$

(2) 積が定義できるための条件より求める行列も2次の正方行列であり、その行列を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{とおくと}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

より $a = d, \quad b = c = 0$ が必要である。逆に、このとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

はスカラー行列であり、任意の2次正方行列との積は交換可能である。

$$\text{求める行列は、スカラー行列} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

3 確認：正方行列 E が E と同じサイズの任意の正方行列 A に対して

$$AE = EA = A$$

を満たすとき、 E を単位行列という。単位行列 E は数字の単位元にあたる行列であり、

特に2次の単位行列 E_2 、3次の単位行列 E_3 は

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。単位行列が表す線型変換は、恒等変換である。

正方行列 A に対して

$$AX = XA = E \text{ (単位行列)}$$

を満たす正方行列 X が存在するとき、 X を A の逆行列といい、 A^{-1} (読み方は A インバース) で表す。逆行列は数字の逆数にあたる行列である。逆行列をもつ正方行列を正則行列という。2次の正方行列については、逆行列の存在条件と求め方を次の4で確認する。また、10で3次の場合を扱う。

成分がすべて0である行列を零行列といい、通常は O で表す。零行列は正方行列には限定されないの、話の流れから行列の型を判断する。正方行列 $A (\neq O)$ がある正方行列 $X (\neq O)$ を用いて $XA = O$ となる、またはある正方行列 $Y (\neq O)$ を用いて $AY = O$ となるとき、 A を零因子行列という。 $XA = AY = O$ であっても $X = Y$ とは限らないので注意する。(むしろ $X \neq Y$ である方がふつう。)

逆行列は逆写像を表現しており、零因子行列の表す写像はある写像と合成して零写像となるので、直観的には零因子行列は逆行列をもたないことがわかる。ただ、証明としては論じにくいので、背理法で証明するとよい。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \quad A^2 + A - 2E = O &\iff A(A + E) = (A + E)A = 2E \\ &\iff A\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E\right) = \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E\right)A = E \end{aligned}$$

であるから、

$$A \text{ は逆行列 } A^{-1} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E \text{ をもつ (答)}$$

(2) 正方行列 A, B が $A \neq O, B \neq O, AB = O$ を満たすとき、 A が逆行列をもたないことだけを示せば十分である。(B が逆行列をもたないことも同様に示される。)

A が逆行列 X をもつとすれば、

$$AX = XA = E \text{ (単位行列)}$$

を満たすから、 $AB = O$ より

$$O = XO = XAB = EB = B$$

となって $B \neq O$ に反する。よって、 A は逆行列をもたない。

(おわり)

□4 確認：行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して， $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を A の余因子行列という。

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = (ad - bc)E \quad (E \text{ は単位行列})$$

となるから， $ad - bc \neq 0$ のとき A は逆行列をもち， $ad - bc = 0$ のとき A は零行列または零因子行列となって逆行列をもたない。この $ad - bc$ を行列 A の行列式 (determinant) といい， $\det A$ と表す。余因子行列も行列式も一般の正方行列で定義されるが，高校では2次の場合のみ扱う。(1)の結果

$$\text{正方行列 } A \text{ が逆行列をもつ} \iff \det A \neq 0$$

$$\text{正方行列 } A \text{ が逆行列をもたない} \iff \det A = 0$$

は重要である。(4)も公式として覚えておく方がよい。

解答：

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおいて，まず十分性を示す。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから， $\det A = ad - bc \neq 0$ ならば行列 A は逆行列

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

をもつ。

必要性を示すために $\det A = ad - bc = 0$ とすると， A の余因子行列 B に対して

$$AB = BA = O$$

となる。 $A = O$ のときは，任意の2次正方行列 X に対して

$$OX = XO = O \neq E$$

となるから， $A = O$ は逆行列をもたない。

$A \neq O$ のとき A は零因子行列であり， A が逆行列 X をもつとすれば，

$$B = EB = XAB = XO = O$$

となり， $A \neq O$ より $B \neq O$ であることと矛盾するから， A は逆行列をもたない。

(おわり)

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ， $A + E = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$ ， $A - E = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$ がすべて逆行列をもたないとすれば，

$$\det A = ad - bc = 0$$

$$\det(A + E) = (a+1)(d+1) - bc = (ad - bc) + (a+d) + 1 = 0$$

$$\det(A - E) = (a-1)(d-1) - bc = (ad - bc) - (a+d) + 1 = 0$$

が同時に成り立つはずだが， $ad - bc = 0$ のもとではあとの2式は両立しない。

よって， A ， $A + E$ ， $A - E$ の少なくとも1つは逆行列をもつ。(おわり)

(3) $\det A = 2 \times 6 - 4 \times 4 = -4 \neq 0$ より A は逆行列をもち、

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

(4) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと、

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (ap + br)(cq + ds) - (aq + bs)(cp + dr) \\ &= adps + bcqr - adqr - bcps \\ &= (ad - bc)(ps - qr) \\ &= (\det A)(\det B) \end{aligned}$$

(おわり)

5 確認：(1)の関係式が成り立つことを(2次の場合の)ケーリー・ハミルトンの定理という。ケーリーとハミルトンは、いずれも定理を発見した数学者の名前である。

ケーリー・ハミルトンの定理は、「正方行列がその固有方程式と同じ関係式をもつ」という興味深い性質を表すが、高校ではそこまで掘り下げて扱わない。ただ、2次の場合に限って行列の関係式の次数を下げる公式として扱う。

2次の正方行列を4次元ベクトルとみると、 A がスカラー行列のときは A と単位行列 E は1次従属であるから、 $\alpha A + \beta E = O$ (α, β はスカラー)であっても $\alpha = \beta = 0$ であるとは限らない。 A がスカラー行列でないときは1次独立であるから係数が一意に定まるが、高校では4次元ベクトルを扱わないので、試験ではその事実を用いない方が無難である。

正方行列の対角成分 ((i, i) 成分)の和をトレースといい、 $\text{tr } A$ と表す。

解答：

$$(1) \quad A^2 - (a+d)A = A\{A - (a+d)E\} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = -(ad - bc)E$$

(おわり)

(注) $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ は A の余因子行列

(2) ケーリー・ハミルトンの定理および仮定より

$$(A^2 =) (a+d)A - (ad - bc)E = 3A - 2E$$

$$(a+d-3)A = (ad - bc - 2)E$$

(i) $a+d-3 \neq 0$ のとき

$$A = kE \quad \left(k = \frac{ad - bc - 2}{a + d - 3} \right)$$

と表せるから、仮定の式より

$$(kE)^2 - 3(kE) + 2E = (k^2 - 3k + 2)E = O$$

対角成分を比べて

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \quad \therefore k = 1, 2$$

このとき、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ または $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる。

(ii) $a+d-3 = 0$ のとき

$$(ad - bc - 2)E = O$$

であるから、対角成分を比べて

$$ad - bc - 2 = 0$$

以上の考察より

$$(a+d, ad - bc) = (2, 1), (4, 4), (3, 2) \quad (\text{答})$$

(3) $\operatorname{tr} A = t$, $\det A = d$ とおくと, ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 = tA - dE$$

$$A^3 = tA^2 - dA = t(tA - dE) - dA = (t^2 - d)A - tdE$$

$A^3 = O$ とすると

$$(t^2 - d)A = tdE$$

(i) $t^2 - d \neq 0$ のとき

$$A = kE \quad \left(k = \frac{td}{t^2 - d} \right)$$

と表せるから,

$$A^3 = (kE)^3 = k^3E = O$$

対角成分を比べて

$$k^3 = 0 \quad \therefore k = 0$$

よって, $A = O$ となるから $A^2 = O$ である。

(ii) $t^2 - d = 0$ のとき

$$tdE = O$$

であるから, 対角成分を比べて

$$td = 0 \quad \therefore t = 0 \text{ または } d = 0$$

$t^2 - d = 0$ より, いずれの場合も $t = d = 0$ となって,

$$A^2 = tA - dE = O$$

(おわり)

6 確認：行列の積は一般には非可換であるが，一つの正方行列 A の多項式(定数項はスカラー行列)で表される行列に限定すれば可換になる。分配法則や結合法則はもとから成り立つので，交換法則さえ成り立てば整式と同じ計算や考察が可能で，特に除法の余りを求める解法が利用できる(解法1)。

また，ケーリー・ハミルトンの公式を

$$(A - \alpha E)(A - \beta E) = O \iff A(A - \alpha E) = \beta(A - \alpha E)$$

とみれば，ちょうど隣接3項間漸化式の解法が適用できることがわかる(解法2)。

実際には，この考え方は行列特有の性質(固有値，固有ベクトルの性質)にもとづいており，隣接3項間漸化式の解法の方がまねをしているのであるが……。

解答：

解法1

多項式 x^n を $x^2 - 3x + 2$ で割った余りを求めるために

$$x^n = (x - 1)(x - 2)Q_n(x) + a_n x + b_n \quad (Q_n(x) \text{ は多項式})$$

とおく。 $x = 1, 2$ を代入して

$$\begin{aligned} 1 &= a_n + b_n, \quad 2^n = 2a_n + b_n & \therefore a_n &= 2^n - 1, \quad b_n = 2 - 2^n \\ \therefore x^n &= (x^2 - 3x + 2)Q_n(x) + (2^n - 1)x + (2 - 2^n) \end{aligned}$$

これは恒等式であるから行列 A に対しても成り立ち，

$$A^n = (A^2 - 3A + 2E)Q_n(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)E$$

$A^2 - 3A + 2E = O$ より

$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)E \quad (\text{答})$$

解法2

$$A^2 - 3A + 2E = (A - E)(A - 2E) = O \text{ より}$$

$$A(A - E) = 2(A - E), \quad A(A - 2E) = A - 2E$$

2式の両辺に A を次々にかけると

$$A^n(A - E) = 2^n(A - E), \quad A^n(A - 2E) = A - 2E$$

2式を辺ごとひいて A^{n+1} を消去すると

$$A^n = 2^n(A - E) - (A - 2E) = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)E \quad (\text{答})$$

(注) 行列の関係式が $(A - \alpha E)^2 = O$ の場合は，二項定理を用いて

$$A^n = (A - \alpha E + \alpha E)^n = nE^{n-1}(A - \alpha E) + E^{n-1}$$

と処理する。→ 7

7 確認：ある2以上の自然数 k に対して $N^k = O$ となるような零行列でない正方行列 N をべき零行列という。特に、 $(N + \alpha E)^n$ (E は単位行列) と表される行列については二項定理が適用できる (\rightarrow 6) ので、展開して $k-1$ 次以下の項を求めればよい。

解答：

(1) ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - 2A + E = (A - E)^2 = O$$

よって、二項定理より

$$\begin{aligned} A^n &= (A - E + E)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k (A - E)^k E^{n-k} \\ &= E^n + n(A - E)E^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{pmatrix} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、直接の計算により

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (n \geq 3)$$

(答)

$n \geq 3$ のとき、二項定理および $N^3 = O$ より

$$\begin{aligned} (N + E)^n &= \frac{n(n-1)}{2} N^2 + nN + E \quad (n = 1, 2 \text{ のときも成立}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

8 確認：対角行列は構造が単純であり，例えば n 乗にしても

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

と簡単に求められる。そのわかりやすさの本質は

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されることにある。

一般の正方行列 A に対しても

$$A\vec{u} = k\vec{u}, \quad \vec{u} \neq \vec{0}$$

を満たすスカラー k と縦ベクトル \vec{u} を見つけることができれば，対角行列と同じように簡単に扱えるはずである。ここで， k を A の固有値， \vec{u} を (k に対応する) 固有ベクトルという。高校数学では用語や深い理論には触れないが，一つの計算手法としてよく用いられる。

解答：

$$(1) A \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 4-y & -1 \\ -4 & 4-y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots (*)$$

ここで，行列 $\begin{pmatrix} 4-y & -1 \\ -4 & 4-y \end{pmatrix}$ が逆行列をもつとすれば，両辺左から逆行列をかけ

ると $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となって矛盾するから，この行列は逆行列をもたない。よって，

$$\det \begin{pmatrix} 4-y & -1 \\ -4 & 4-y \end{pmatrix} = (4-y)(4-y) - (-1)(-4) = 0$$

$$y^2 - 8y + 12 = (y-2)(y-6) = 0 \quad \therefore y = 2, 6$$

(*)に代入して

$$y = 2 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore x = 2$$

$$y = 6 \text{ のとき } \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore x = -2$$

以上より

$$(x, y) = (2, 2), (-2, 6) \quad (\text{答})$$

(2) (1)より

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

両辺左から A を次々にかけて

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2式をひとつにまとめると

$$A^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 6^n \\ 2^{n+1} & -2 \cdot 6^n \end{pmatrix}$$

両辺右から $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ をかけて

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2^n & 6^n \\ 2^{n+1} & -2 \cdot 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 2 \cdot 6^n & 2^n - 6^n \\ 2^{n+2} - 4 \cdot 6^n & 2^{n+1} + 2 \cdot 6^n \end{pmatrix} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注)

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

をひとつにまとめると

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ とおくと P は正則行列であり,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

と表現できる。この操作を行列の対角化という。その意味するところは、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

の代わりに $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ を基本ベクトルにとって座標平面を考えると、行列 A に

よる変換が $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ による変換と本質的に変わらないことを表す。

$$P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}$$

であることに注目して A^n を求めてもよい。

9 確認：一般に，集合 A のすべての要素 a に対して集合 B の要素へ対応させる規則 $f: A \rightarrow B$ のことを， A から B への写像という。写像 $f: A \rightarrow B$ の特別な場合として， B が実数の集合であるとき (A で定義された) 関数， $A = B$ のとき変換という。

集合 A, B に和と実数倍が定義されていて，任意の $a, b \in A$ と実数 s, t に対して

$$f(sa + tb) = sf(a) + tf(b)$$

を満たすとき，この写像 f の性質を線型性という。簡単に言えば，和と実数倍を保存する性質のことである。そして，線型性をもつ (座標平面上または座標空間上の) 変換を1次変換または線型変換という。正式には線型変換であるが，以下では高校にあわせて「1次変換」と呼び，座標平面上の1次変換だけを扱う。

ここで「1次」とは linear の訳語であり，「線型」と同じ意味である。もともとは「線型性を満たす変換」であるものが，条件(i)のように「行列で表される変換」と同値であることを確認するのが本問のねらいである。条件(i)において，行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を f の表現行列といい，逆に f のことを A で表される1次変換という。

解答：

$$(i) \Rightarrow (ii) : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とおく。}$$

行列の性質より，分配法則と実数倍についての結合法則が成り立つから

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(s \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = s \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

となつて， f は線型性を満たす。

$$(ii) \Rightarrow (i) : \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とおく。}$$

座標平面上で変換 f が定義されている以上，

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

を満たす実数 a, b, c, d が存在する。

仮定の線型性と行列の演算法則より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) \\ &= x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となつて，変換 f は行列で表現される。

(証明おわり)

10 確認：点Pが1次変換 f により点Qに移される時、点Qを点Pの f による像という。また、点Qに対して $f(P) = Q$ を満たす点Pがあるとき、点Pを点Qの原像という。点や1次変換によっては、原像が存在しないこともある。

1次変換の線型性(または定義)より、原点の像は必ず原点になるから、

$$f(P) = Q \text{ と } f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OQ} \text{ を同一視}$$

できる。むしろ、一般の図形の像を求める時は、ベクトル表示の方が都合が良い。

本問は強引な計算により答を出すこともできるが、1次独立(線型独立)な2つのベクトルの像で1次変換は完全に決まるという考え方が重要である。8(2)のようにして行列 A を求めると考えてもよいし、線型性をうまく活用するのもよい。

解答：

仮定より

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots (*)$$

であるから、行列の性質(特に積の定義)より

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は逆行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ をもつから、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) (*)より、 $(2, 1)$ の像は $(7, 4)$ (答)

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ より、 $(0, 1)$ の像は $(3, 2)$ (答)

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \end{pmatrix}$ より、 $(3, 5)$ の像は $(21, 13)$ (答)

別解：

(1) (*)より

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

(2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、(*)と線型性(行列の性質)より

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

(3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから、(*), (2)と線型性(行列の性質)より

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

11 確認：10の別解のように，1次変換は(その線型性により)1次独立な2つのベクトルの像により完全に決まる。本問では， \vec{OA} と \vec{OB} が1次独立であることに注目して， \vec{OA} ， \vec{OB} の1次結合で表してから f による像を求める。もっとも，本問の場合は座標が設定されていないので，行列をかけて求めることはできないが……

解答：

(1) $\vec{OC} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ であるから， f の線型性と像についての仮定より

$$\begin{aligned} f(\vec{OC}) &= f(\vec{OB}) - f(\vec{OA}) \\ &= \vec{OE} - \vec{OD} \\ &= (\vec{OB} - \vec{OA}) - (-\vec{OB}) \\ &= -\vec{OA} + 2\vec{OB} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) (1)と同様にして，

$$f(\vec{OE}) = f(-\vec{OB}) = -f(\vec{OB}) = -\vec{OC} = \vec{OA} - \vec{OB}$$

であるから，(1)の途中考察と結果をあわせて

$$\begin{aligned} f(\vec{OA}) &= \vec{OD} = -\vec{OB} \\ f(\vec{OB}) &= \vec{OC} = \vec{OB} - \vec{OA} \\ f(f(\vec{OA})) &= f(\vec{OD}) = \vec{OA} - \vec{OB} \\ f(f(\vec{OB})) &= f(\vec{OC}) = -\vec{OA} + 2\vec{OB} \end{aligned}$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned} f(f(\vec{OA})) - f(\vec{OA}) &= \vec{OA} - \vec{OB} - (-\vec{OB}) = \vec{OA} \\ f(f(\vec{OB})) - f(\vec{OB}) &= -\vec{OA} + 2\vec{OB} - (\vec{OB} - \vec{OA}) = \vec{OB} \end{aligned}$$

\vec{OA} と \vec{OB} は1次独立であることより，ある実数 s ， t を用いて

$$\vec{p} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$$

と表されるから， f の線型性により

$$\begin{aligned} f(f(\vec{p})) - f(\vec{p}) &= sf(f(\vec{OA})) + tf(f(\vec{OB})) - sf(\vec{OA}) - tf(\vec{OB}) \\ &= s\{f(f(\vec{OA})) - f(\vec{OA})\} + t\{f(f(\vec{OB})) - f(\vec{OB})\} \\ &= s\vec{OA} + t\vec{OB} \\ &= \vec{p} \end{aligned}$$

(証明おわり)

12 確認：1次変換 f により点 (x, y) が点 (x', y') に移され，1次変換 g により点 (x', y') が点 (x'', y'') に移されるとき，点 (x, y) を点 (x'', y'') に移す1次変換を f と g の合成変換といい， $g \circ f$ で表す。 f, g の表現行列をそれぞれ A, B とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり， $g \circ f$ の表現行列は(そのままの順序で) BA となる。

1次変換 f により自身に移される点 P ，すなわち f の表現行列 A に対して

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

を満たす点 $P(p, q)$ を f の不動点という。座標平面上のすべての点が不動点である(座標平面上の)1次変換を恒等変換といい，恒等変換の表現行列は単位行列である。

変換 $f : (x, y) \mapsto (x', y')$ に対して， $(x', y') \mapsto (x, y)$ も変換となるとき，これを f の逆変換といい， f^{-1} と表す。(3)により， f が1次変換ならば f^{-1} も1次変換である。このとき， f の表現行列を A ， f^{-1} の表現行列を B とすれば，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるから，

$$AB = BA = E \text{ (単位行列)} \quad \therefore B = A^{-1}$$

解答：

(1) g の表現行列を B とすると，

$$B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \therefore B \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2^2 - 1^2 = 3 \neq 0$ より $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ は逆行列 $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ をもつから，

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

よって， $f \circ g$ の表現行列は

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

$g \circ f$ の表現行列は

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

(2) x 軸に関する対称変換は $(x, y) \mapsto (x, -y)$ であるから, 行列で表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y 軸に関する対称変換は $(x, y) \mapsto (-x, y)$ であるから, 行列で表すと

$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって, x 軸に関する対称変換と y 軸に関する対称変換の合成は, 行列

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で表される1次変換であり, $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ と移すから,
原点に関する対称変換 (答)

(3) $f^{-1} \circ f$ は恒等変換であるから, 任意の実数 s, t およびベクトル \vec{u}, \vec{v} に対して

$$sf^{-1}(\vec{u}) + tf^{-1}(\vec{v}) = f^{-1} \circ f (sf^{-1}(\vec{u}) + tf^{-1}(\vec{v}))$$

合成変換の結合法則および f の線型性より

$$f^{-1} \circ f (sf^{-1}(\vec{u}) + tf^{-1}(\vec{v})) = f^{-1}(sf \circ f^{-1}(\vec{u}) + tf \circ f^{-1}(\vec{v}))$$

$f \circ f^{-1}$ も恒等変換であるから

$$f^{-1}(sf \circ f^{-1}(\vec{u}) + tf \circ f^{-1}(\vec{v})) = f^{-1}(s\vec{u} + t\vec{v})$$

よって,

$$f^{-1}(s\vec{u} + t\vec{v}) = sf^{-1}(\vec{u}) + tf^{-1}(\vec{v})$$

が成り立ち, 逆変換 f^{-1} は線型性をもつ。 (証明おわり)

(4) (3)において, g の表現行列は $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ である。

$$\det B = 1 \times 2 - (-2) \times 0 = 2 \neq 0$$

より B は逆行列 B^{-1} をもち,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

であるから,

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

で表される1次変換が g^{-1} である。

(5) f^{-1} が存在するならば, 1次独立なベクトル \vec{u}, \vec{v} と実数 s, t に対して

$$sf(\vec{u}) + tf(\vec{v}) = f(s\vec{u} + t\vec{v}) = \vec{0}$$

$$\implies s\vec{u} + t\vec{v} = f^{-1}(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$\implies s = t = 0$$

となるから, $f(\vec{u})$ と $f(\vec{v})$ は1次独立である。 (証明おわり)

13 確認：数学Ⅱ「図形と方程式」で習ったように，図形は条件式を満たす点の集まりであるから，点 $(p(t), q(t))$ の軌跡を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される1次変換で移すと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

で表される図形になるというのが一般論である。

直線の像を求める場合は， $(p(t), q(t))$ の部分をベクトル方程式で表して

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ の像は } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

と考えればよい。12(5)のように考えると

$$f^{-1} \text{ が存在するとき， } \vec{d} \neq \vec{0} \text{ ならば } f(\vec{d}) \neq \vec{0}$$

となって，逆変換を持つ1次変換による直線の像は直線となることがわかるので，(2)のように逆変換をもつときは，像が直線となる理由説明を省略することができる。

直線 l の1次変換 f による像が l 自身になるとき，直線 l を f の不動直線という。 f の不動点の集まりである直線は不動直線となるが，不動直線は不動点の集まりとは限らないので注意する。例えば， f を x 軸に関する対称移動 (\rightarrow 12(3)) とするとき， y 軸は f の不動直線であるが，原点以外は不動点ではない。

不動直線の求め方は，(1)のように必要十分で解く方法と，必要条件として

$$ax + by + c = 0 \text{ に対して } ax' + by' + c = 0 \text{ が成り立つ}$$

ことより a, b, c を決定してから十分条件(像が直線となること)をチェックする方法とがある。像が直線上にあるというだけでは，像自体が直線であるとはいえない。

(1)のように(必要十分で)解く方が素直でわかりやすいが，必要条件から迫る解法の方が意外と速く解ける。

解答：

(1)(i) 直線 $2x - y + 3 = 0$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表され， f による像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

すなわち，点 $(-3, 6)$ (答)

(ii) 直線 $5x + 2y - 1 = 5(x - 1) + 2(y + 2) = 0$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

と表され， f による像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = (4 + 9t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$4 + 9t$ はすべての実数を取り得るから、求める像は

$$\text{直線 } y = -2x \quad (\text{答})$$

(iii) f により点 $(1, -2)$ に移される図形は、

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

より

$$\text{直線 } 2x - y = 1 \quad (\text{答})$$

(2) $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$ より、この行列の表す1次変換は逆変換をもつから、

直線 $2x - y + 3 = 0$ の像は直線となる。その方程式は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

を代入して

$$2(-x' - y') - (-3x' - 2y') + 3 = x' + 3 = 0$$

よって、求める像は

$$\text{直線 } x = -3 \quad (\text{答})$$

(3) 不動直線の方向ベクトルを (p, q) とすると、ある実数 k が存在して

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 3-k & -1 \\ -2 & 2-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots (*)$$

ここで、この行列が逆行列を持てば、両辺左からかけて (p, q) が零ベクトルとなって方向ベクトルであることに反する。よって、逆行列を持たないことより

$$\det \begin{pmatrix} 3-k & -1 \\ -2 & 2-k \end{pmatrix} = (3-k)(2-k) - (-1)(-2) = 0$$

$$k^2 - 5k + 4 = (k-1)(k-4) = 0 \quad \therefore k = 1, 4$$

(*)より

$$k = 1 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$k = 4 \text{ のとき } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(i) $(1, 2)$ に平行な不動直線

$(1, 2)$ と $(1, -1)$ が1次独立であることに注意すると、直線の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (a \text{ は定数}, t \text{ は変数}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

であり、1次変換による像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

であるから，①と②が一致する a の条件を考えて

$$a = 0$$

(ii) $(1, -1)$ に平行な不動直線

$(1, 2)$ と $(1, -1)$ が1次独立であることに注意すると，直線の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (b \text{ は定数}, t \text{ は変数}) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

であり，1次変換による像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

であるから，③と④が b の一致する条件を考えて

b は任意の実数定数

以上より，求める不動直線は

$$y = 2x, \quad y = -x + k \quad (k \text{ は任意の実数定数}) \quad (\text{答})$$

(3)の別解：

不動直線の方程式を

$$ax + by + c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

とおくと，必要条件として①を満たす任意の x, y に対して

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad ax' + by' + c = 0$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned} a(3x - y) + b(-2x + 2y) + c &= 0 \\ \therefore (3a - 2b)x + (-a + 2b)y + c &= 0 \quad \dots\dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

⑤と⑥が同一直線となる条件を求めて

(i) $c = 0$ のとき

$$\begin{aligned} a : b &= (3a - 2b) : (-a + 2b) \\ b(3a - 2b) &= a(-a + 2b) \\ a^2 + ab - 2b^2 &= (a + 2b)(a - b) = 0 \quad \therefore \frac{a}{2} = \frac{b}{-1} \text{ または } a = b \end{aligned}$$

(ii) $c \neq 0$ のとき

$$a = 3a - 2b \quad \text{かつ} \quad b = -a + 2b \quad \therefore a = b$$

以上より，

$$2x - y = 0 \quad \text{または} \quad x + y + c = 0 \quad (c \text{ は任意の実数定数}) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

方向ベクトルの像を調べると

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

となって⑦の像はいずれも直線となるから，これらすべてが求める不動直線であり，

$$2x - y = 0 \quad \text{または} \quad x + y + c = 0 \quad (c \text{ は任意の実数定数}) \quad (\text{答})$$

14 確認：13で確認したように，点 $(p(t), q(t))$ の軌跡を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される1次変換で移すと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

で表される図形になる。一般の図形の場合は，この基本事項1つだけですべてが解決できる。また，それでうまく解ける問題だけが入試で出題される。

解答：

(1)

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - 3y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

であり， $x - 3y$ はすべての実数値をとり得るから，全平面の f による像は
直線 $y = 2x$ (答)

(ii) 放物線 $y = x^2$ は

点 (t, t^2) の軌跡

であるから， f による像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = (t - 3t^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$t - 3t^2 = -3\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} \leq \frac{1}{12}$ より，求める像は

$$\text{半直線 } y = 2x, \quad x \leq \frac{1}{12} \quad (\text{答})$$

(iii) 円 $x^2 + y^2 = 1$ は

点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ の軌跡

であるから， f による像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = (\cos \theta - 3 \sin \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\cos \theta - 3 \sin \theta = \sqrt{10} \cos(\theta + \alpha)$ ($\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$) より

$$\text{線分 } y = 2x, \quad -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10} \quad (\text{答})$$

(2) 領域 $2y - x \geq 0$, $3x - y \geq 0$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

と表されるから， g による像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

の $s \geq 0$, $t \geq 0$ の部分であるから，

$$\text{領域 } 3x + 5y \geq 0, \quad x \leq 0 \quad (\text{答})$$

15 確認：(1)で確認するように、原点のまわりに θ だけ回転させる変換は、行列 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ で表される1次変換となる。その証明は、加法定理の(回転による)

証明とほとんど同じ考え方であり、加法定理はあらためて

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

と表現できる。なお、原点以外の点を中心とする回転変換は、1次変換にはならない。

(2), (3)に見られるように、 $a^2 + b^2 \neq 0$ のとき

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

とおくことにより、

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

で表される1次変換は、相似と回転の合成変換と解釈される。そこで、直線の像を求めるには原点(回転の中心)からおろした垂線の足に注目し、円の像を求めるには中心が移る先に注目して、図形的に考察できる。

(4)では、直線 $y = x$ に関して対称な図形であることに注目して、原点のまわりに $\pm \frac{\pi}{4}$ だけ回転させると、対称軸が座標軸に一致して標準形になることが期待できる。このようにして、2次曲線の標準形を得る方法を主軸変換という。

解答：

(1) 座標平面上で、原点のまわりに θ だけ回転させても4点 $(0, 0)$, $(x, 0)$, (x, y) , $(0, y)$ の位置関係は変わらないから、この変換により

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto x \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \end{pmatrix}$$

と移される。

余角の公式と負角の公式、および行列の演算法則より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= x \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、主張は示された。

(おわり)

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

であるから, $10 = 6 + 4$ を考えて

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^{10} &= 2^{10} \begin{pmatrix} \cos \frac{4}{3}\pi & -\sin \frac{4}{3}\pi \\ \sin \frac{4}{3}\pi & \cos \frac{4}{3}\pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -512 & 512\sqrt{3} \\ -512\sqrt{3} & -512 \end{pmatrix} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{4}{5} = \cos \theta, \quad \frac{3}{5} = \sin \theta \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となるから, f は原点を中心とする5倍拡大の相似変換と θ 回転変換の合成である。

(i) 原点から直線 $x = 1$ におろした垂線の足は $(1, 0)$ であり, f により

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と移され, 原点からおろした垂線の足が $(4, 3)$ となる直線が求める像である。

点 $(4, 3)$ を通り, ベクトル $(4, 3)$ に垂直な直線の方程式を求めると

$$4(x - 4) + 3(y - 3) = 0 \quad \therefore 4x + 3y - 25 = 0$$

よって, 求める像は

$$\text{直線 } 4x + 3y - 25 = 0 \quad (\text{答})$$

(ii) 円の中心は, f により

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と移され, 5倍拡大されるから, 求める像は

$$\text{円 } (x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 5^2 \quad (\text{答})$$

(4) 直線 $y = x$ に関して対称な図形であることに注目して, 原点を中心に $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転させると,

$$x'^2 - x'y' + y'^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{x-y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{2}} + \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 1$$

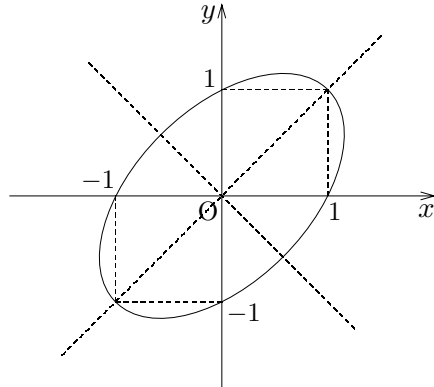
これは、長軸の両端が $(\pm\sqrt{2}, 0)$ 、短軸の両端が $(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ である楕円を表す。

原点のまわりに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させれば、

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \mapsto \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

と移されるから、求める曲線は次図のような楕円となる。



(答)

16 確認：原点を通る直線に関する対称変換は1次変換であることを示し、その表現行列を求めることが本問のねらいである。結果は是非とも覚えておきたい。

解答：

原点を通り、ベクトル $(\cos \theta, \sin \theta)$ に平行な直線を l とし、 l の方程式は $x \sin \theta - y \cos \theta = 0$

である。

(解法1) $P(x, y)$ の l に関する対称点を $Q(x', y')$ とする。

PQ の中点 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ は l 上にあるから

$$\begin{aligned} \frac{x+x'}{2} \sin \theta - \frac{y+y'}{2} \cos \theta &= 0 \\ \therefore -x' \sin \theta + y' \cos \theta &= x \sin \theta - y \cos \theta \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{PQ} = (x' - x, y' - y)$ は l に垂直であるから

$$\begin{aligned} (x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta &= 0 \\ \therefore x' \cos \theta + y' \sin \theta &= x \cos \theta + y \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

行列の性質を用いて計算すると

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{かつ} \textcircled{2} &\iff \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、直線 l に関する対称変換は1次変換であり、表現行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

(解法2)

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

とおくと、 $l \parallel \vec{p} \perp \vec{q}$ であり、 f は

$$f(\alpha \vec{p} + \beta \vec{q}) = \alpha \vec{p} - \beta \vec{q}$$

で定まる変換である。

\vec{p}, \vec{q} は1次独立であるから、平面上の任意のベクトル \vec{u}, \vec{v} は

$$\vec{u} = a\vec{p} + b\vec{q}, \quad \vec{v} = c\vec{p} + d\vec{q} \quad (a, b, c, d \text{ は実数})$$

と表され、任意の実数 s, t に対して

$$\begin{aligned}
 f(s\vec{u} + t\vec{v}) &= f(s(a\vec{p} + b\vec{q}) + t(c\vec{p} + d\vec{q})) \\
 &= f((sa + tc)\vec{p} + (sb + td)\vec{q}) \\
 &= (sa + tc)\vec{p} - (sb + td)\vec{q} \\
 &= s(a\vec{p} - b\vec{q}) + t(c\vec{p} - d\vec{q}) \\
 &= sf(\vec{u}) + tf(\vec{v})
 \end{aligned}$$

が成り立つから， f は線型性をもつ。

表現行列を A とすると

$$A \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}
 A \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\
 A &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(解法 3) l に関する対称変換は，原点のまわりに $-\theta$ 回転， x 軸に関して対称移動，原点のまわりに θ 回転の順に合成した変換であるから 1 次変換であり，表現行列 A は

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$