$\boxed{\mathbf{1}}$ 得点を X とする。

(1) $X=3$ となるのは,

「$a=3$, b は奇数」または「$b=3$, a は偶数」

のときであるから，求める確率は

$$P(X=3)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\quad(\text{答})$$

(2) $X=k$ となるのは,

「$a=k$, $b-k$ が偶数」または「$b=k$, $a-k$ が偶数」

のときであるから，得点 k の値によらず

$$P(X=k)=\frac{1}{6}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$$

である。

得点 X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X)=(1+2+3+4+5+6)\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}\quad(\text{答})$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ より

$$2^{4\cos^2 x}-2^{3-4\cos^2 x}=7$$

$X=2^{4\cos^2 x}$ とおくと

$$X-\frac{2^3}{X}=7$$
$$X^2-7X-8=0$$
$$(X+1)(X-8)=0$$

$X=2^{4\cos^2 x}>0$ より

$$2^{4\cos^2 x}=8=2^3$$
$$4\cos^2 x=3$$
$$\cos^2 x=\frac{3}{4}\qquad\therefore\ \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq x<360^\circ$ より

$$x=30^\circ,\ 150^\circ,\ 210^\circ,\ 330^\circ\quad(\text{答})$$

3

$$
\begin{aligned}
&\left|\overrightarrow{\mathrm{QP_1}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{QP_2}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{QP_3}}\right|^2-3\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2\\
&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2-3\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2\\
&=\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2\right)+\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2\right)\\
&\qquad+\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2\right)-3\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2\\
&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}\right|^2+2\left(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\
&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}\right|^2+\ \overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\
&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}\right|^2
\end{aligned}
$$

となり，この値は点 Q によらないから任意の点に対して同じ値であり，

$$
\begin{aligned}
&\left|\overrightarrow{\mathrm{QP_1}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{QP_2}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{QP_3}}\right|^2-3\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2\\
&=\left|\overrightarrow{\mathrm{RP_1}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{RP_2}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{RP_3}}\right|^2-3\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ。 (証明おわり)

4

(1) $y'=3x^2-1=2$ とおくと，

$$x^2=1 \qquad \therefore\ x=\pm 1$$

$x=\pm 1$ における C の接線を求めて

$$y=2(x+1),\ y=2(x-1) \quad (答)$$

(2) (1)をもとにして図形的に考えると，直線 $y=2x+k$ と C の共有点の個数は，

$$
\begin{cases}
k<-2 \ \text{または}\ k>2 \ \text{のとき} & 1\ \text{個}\\
k=\pm 2 \ \text{のとき} & 2\ \text{個}\\
-2<k<2 \ \text{のとき} & 3\ \text{個}
\end{cases}
\quad (答)
$$