

$$\boxed{1} \quad \sqrt{4x - x^2} > 3 - x \quad \dots\dots ①$$

実数条件より

$$\begin{aligned} 4x - x^2 &\geq 0 \\ x(x - 4) &\leq 0 \quad \therefore 0 \leq x \leq 4 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

(i) $3 - x < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \text{②のもとで ①は成り立ち,} \\ x > 3 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

(ii) $3 - x \geq 0$ のとき

②のもとで

$$\begin{aligned} \text{①} &\iff 4x - x^2 > (3 - x)^2 \\ &\iff 2x^2 - 10x + 9 < 0 \\ &\iff \frac{5 - \sqrt{7}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \\ \therefore \frac{5 - \sqrt{7}}{2} &< x \leq 3 \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

②かつ“③または④”より

$$\frac{5 - \sqrt{7}}{2} < x \leq 4 \quad (\text{答})$$

2

(1) 与えられた式を変形すると

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} = x\overrightarrow{OA} + \frac{y}{q}\overrightarrow{OD} \quad \dots\dots ①$$

$$= \frac{x}{p}\overrightarrow{OC} + y\overrightarrow{OB} \quad \dots\dots ②$$

M は AD 上の点であるから, ①より

$$x + \frac{y}{q} = 1 \quad \dots\dots ③$$

M は BC 上の点であるから, ②より

$$\frac{x}{p} + y = 1 \quad \dots\dots ④$$

 $0 < p < 1, 0 < q < 1$ のもとで, 連立方程式を解くと

$$\begin{aligned} ③\text{かつ}④ &\iff \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{pq-1} \begin{pmatrix} p & -1 \\ -1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{p(q-1)}{pq-1}, \quad y = \frac{q(p-1)}{pq-1} \quad (\text{答})$$

(2) N は直線 OM 上の点であるから

$$\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM} = \frac{p(q-1)}{pq-1}k\overrightarrow{a} + \frac{q(p-1)}{pq-1}k\overrightarrow{b} \quad (k \text{ は実数})$$

と表される。N は辺 AB 上の点でもあるから

$$\frac{p(q-1)}{pq-1}k + \frac{q(p-1)}{pq-1}k = 1$$

$$\therefore k = \frac{pq-1}{2pq-p-q}$$

$$\therefore \overrightarrow{ON} = \frac{p(q-1)\overrightarrow{a} + q(p-1)\overrightarrow{b}}{2pq-p-q}$$

 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ は 1 次独立であるから, $\overrightarrow{ON} = z\overrightarrow{a} + w\overrightarrow{b}$ より

$$z = \frac{p(q-1)}{2pq-p-q}, \quad w = \frac{q(p-1)}{2pq-p-q} \quad (\text{答})$$

3

$$\begin{aligned}
 y' &= 1 - \cos x + \sqrt{3} \sin x \\
 &= 1 - 2 \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) \\
 &= 1 - 2 \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= 1 - 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left\{ \frac{1}{2} - \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

の符号から, $y = x - (\sin x + \sqrt{3} \cos x)$ の $-\pi \leq x \leq \pi$ における増減は

x	$-\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	0	π
y'	+	0	-	0
y		↗ 極大	↘ 極小	↗

$$x = -\pi \text{ のとき } y = -\pi + \sqrt{3}$$

$$x = -\frac{2}{3}\pi \text{ のとき } y = -\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$$

$$x = 0 \text{ のとき } y = -\sqrt{3}$$

$$x = \pi \text{ のとき } y = \pi + \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 (-\pi + \sqrt{3}) - (-\sqrt{3}) &= 2\sqrt{3} - \pi \\
 &= \sqrt{12} - \pi > \sqrt{10.24} - \pi = 3.2 - \pi > 0
 \end{aligned}$$

であるから, $y = x - (\sin x + \sqrt{3} \cos x)$ は

$$\begin{cases} x = \pi \text{ のとき最大値 } \pi + \sqrt{3} \\ x = 0 \text{ のとき最小値 } -\sqrt{3} \end{cases} \quad (\text{答})$$

をとる。

4

(1) 円の接線の公式より, l の方程式は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 1 \quad \therefore y = \sqrt{3}x - 2$$

放物線 $y = ax^2 + b$ が P において l と接するから

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + b \\ \sqrt{3} = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \therefore a = 1, \quad b = -\frac{5}{4} \quad (\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{OP} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ であることを考え, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3}\pi + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ x \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \left(x^2 - \frac{5}{4}\right) \right\} dx \\ &= \frac{\pi}{3} + \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{5}{4}x \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{5\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) (2)の図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_b^{-\frac{1}{2}} \pi \cdot \frac{y-b}{a} dy + \int_{-\frac{1}{2}}^1 \pi(1-y^2) dy \\ &= \frac{\pi}{a} \left[\frac{1}{2}(y-b)^2 \right]_b^{-\frac{1}{2}} + \pi \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= \pi \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \right)^2 + \pi \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{1}{8} \right) \\ &= \pi \left(\frac{9}{32} + \frac{3}{2} - \frac{3}{8} \right) \\ &= \frac{45}{32} \pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$