

1

(1) $n = p^a$ の正の約数は

$$p^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, a)$$

と表されるから, 等比数列の和の公式より

$$\sigma(n) = \sum_{k=0}^a p^k = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} \quad (\text{答})$$

(2) (1)と同様に

$$\sigma(m) = \sum_{l=0}^b q^l = \frac{q^{b+1} - 1}{q - 1}$$

であり, mn の正の約数は

$$p^k q^l \quad (k = 0, 1, 2, \dots; l = 0, 1, 2, \dots)$$

と表されるから, 和の性質より

$$\sigma(nm) = \sum_{k=0}^a \sum_{l=0}^b p^k q^l = \sum_{k=0}^a p^k \sum_{l=0}^b q^l = \sigma(n)\sigma(m)$$

(証明おわり)

(3) $n = 2^{a-1}p$ ($p = 2^a - 1$ は奇素数) のとき, (2)と等比数列の和の公式を用いて,

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sigma(2^{a-1})\sigma(p) \\ &= \frac{2^a - 1}{2 - 1} \cdot (p + 1) \\ &= 2^a(p + 1) - (p + 1) \\ &= 2^a p + 2^a - (2^a - 1 + 1) \\ &= 2^a p \\ &= 2n \end{aligned}$$

(証明おわり)

(注) (3)は逆も成り立つ。すなわち, n が偶数であるとき

$\sigma(n) = 2n \implies n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ かつ $2^a - 1$ は素数が成り立つ。

 n は偶数であるから,

$$n = 2^{a-1}b \quad (a \text{ は正の整数, } b \text{ は正の奇数})$$

と表される。 2^{a-1} と b は互いに素であるから,

$$2 \cdot 2^{a-1}b = \sigma(n) = \sigma(2^{a-1})\sigma(b) = \frac{2^a - 1}{2 - 1} \cdot \sigma(b)$$

$$\therefore \sigma(b) = \frac{2^a b}{2^a - 1} = \frac{2^a - 1 + 1}{2^a - 1} \cdot b = \left(1 + \frac{1}{2^a - 1}\right)b = b + \frac{b}{2^a - 1}$$

 2^a と $2^a - 1$ は互いに素であるから,

$$\frac{b}{2^a - 1} = \sigma(b) - b \text{ は正の整数, 特に } b \text{ の正の約数}$$

である。したがって、 $\sigma(b) = b + \frac{b}{2^a - 1}$ となるのは、

$$b \text{ が素数, かつ } \frac{b}{2^a - 1} = 1$$

である場合に限られる。

$$\sigma(n) = 2n \text{ は}$$

$$1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

のように、 n 自身以外の正の約数の和と n が一致することを意味し、このような性質をもつ自然数を完全数という。本問で見たように、

n が偶数の完全数 $\iff n = 2^a(2^{a-1} - 1)$ かつ $2^{a-1} - 1$ は素数
であり、奇数の完全数は存在するかどうか不明である。

2

$$(1) f(x) = |x^2 - 4x + 3| = |(x-1)(x-3)|$$

直線 $y = g(x)$ が $y = -(x^2 - 4x + 3)$ と接するとき、
2 次方程式

$$ax = -(x^2 - 4x + 3)$$

すなわち

$$x^2 + (a-4)x + 3 = 0$$

は重解を持つから

$$(\text{判別式}) = (a-4)^2 - 4 \cdot 3 = 0$$

$$(a-4+2\sqrt{3})(a-4-2\sqrt{3}) = 0 \quad \therefore a = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

$1 \leq x \leq 3$ において接するのは、図形的に考えて

$$a = 4 - 2\sqrt{3}$$

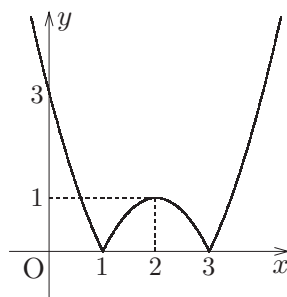
図を参考にして、

「曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ が共有点を 4 つもつ」

\Leftrightarrow 「曲線 $y = -(x^2 - 4x + 3)$ と直線 $y = ax$ が

$1 < x < 3$ において 2 交点をもつ」

$\Leftrightarrow 0 < a < 4 - 2\sqrt{3}$ (答)



(2) 曲線 $y = x^2 - 4x + 3$ と直線 $y = x$ の交点の x 座標は

$$x^2 - 4x + 3 = x$$

より

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$\alpha = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$, $\beta = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ とおくと、領域

$$|x^2 - 4x + 3| \leq y \leq x$$

の面積 S は

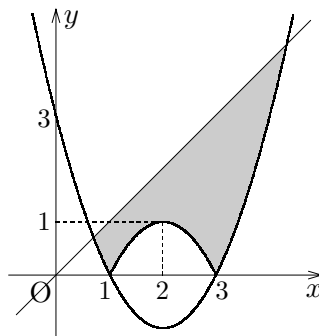
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{x - (x^2 - 4x + 3)\} dx - 2 \int_1^3 \{-(x^2 - 4x + 3)\} dx$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx + 2 \int_1^3 (x-1)(x-3) dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 - \frac{2}{6}(3-1)^3$$

$$= \frac{1}{6}(\sqrt{13})^3 - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{-16 + 13\sqrt{13}}{6} \quad (\text{答})$$



3

$$(1) \quad 3x^2 - 6x + 2 = 3(x-1)^2 - 1 = 3\left(x-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

と変形されるから，2 次方程式 $3x^2 - 6x + 2 = 0$ の解

$$x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

は 0 でない相異なる 2 実数である。

(証明おわり)

(注) (判別式) > 0 かつ $3 \times 0^2 - 6 \times 0 + 2 \neq 0$ より示してもよい。

(2) 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = \frac{2}{3}$$

また，

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

であることに注意する。

$$(i) \quad A_1 = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)(\alpha + \beta) = 3 \times 2 = 6$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)(\alpha + \beta)^2 \\ &= \left\{\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}\right\}(\alpha + \beta)^2 \\ &= \left(3^2 - 2 \times \frac{3}{2}\right) \times 2^2 = 24 \end{aligned}$$

はともに整数である。

(証明おわり)

$$\begin{aligned} (ii) \quad A_{n+1} &= (\alpha + \beta)^{n+1}(\alpha^{-n-1} + \beta^{-n-1}) \\ &= (\alpha + \beta)^{n+1}\{(\alpha^{-1} + \beta^{-1})(\alpha^{-n} + \beta^{-n}) - (\alpha\beta)^{-1}(\alpha^{-n+1} + \beta^{-n+1})\} \\ &= 2^{n+1}\left\{3(\alpha^{-n} + \beta^{-n}) - \frac{3}{2}(\alpha^{-n+1} + \beta^{-n+1})\right\} \\ &= 6 \cdot 2^n(\alpha^{-n} + \beta^{-n}) - 6 \cdot 2^{n-1}(\alpha^{-n+1} + \beta^{-n+1}) \\ &= 6A_n - 6A_{n-1} \end{aligned}$$

より， A_{n-1} および A_n が整数ならば A_{n+1} も整数であり，(i)より A_1, A_2 は整数であるから，数学的帰納法により

すべての自然数 n について A は整数

となることがわかる。

(証明おわり)