数　学　問　題

解答は，それぞれ問題の番号に対応する答案用紙に
書くこと．

1　正の整数 n に対し n の正の約数すべての和を $\sigma(n)$ とおく．ただし，1 と n も n の約数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　素数 p，正の整数 a に対し，$n = p^a$ とおく．$\sigma(n)$ を p と a で表せ．

(2)　相異なる素数 p，q，正の整数 a，b に対し，$n = p^a$，$m = q^b$ とおく．このとき，

$$\sigma(nm) = \sigma(n)\,\sigma(m)$$

が成立することを証明せよ．

(3)　正の整数 a について $2^a - 1$ が素数とする．このとき，$n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ とおくと，

$$\sigma(n) = 2n$$

が成立することを証明せよ．

2 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = |\,x^2 - 4x + 3\,|$$
$$g(x) = ax \quad (a > 0)$$

とおく. 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ が共有点を 4 つもつような定数 a の値の範囲を求めよ.

(2) 次の連立不等式の表す領域を図示し, その領域の面積を求めよ.

$$\begin{cases} y \geqq |\,x^2 - 4x + 3\,| \\ y \leqq x \end{cases}$$

3 次の問いに答えよ.

(1) 方程式 $3x^2 - 6x + 2 = 0$ は 2 つの相異なる実数解をもち，それらはいずれも 0 でないことを示せ.

(2) α，β を (1) の方程式の相異なる解とする．自然数 n に対し
$A_n = (\alpha^{-n} + \beta^{-n})(\alpha + \beta)^n$ とおく.

(i) A_1，A_2 は整数となることを示せ.

(ii) すべての自然数 n について A_n は整数となることを示せ.