

1

$$(1) f(x) = |x^2 - 4x + 3| = |(x-1)(x-3)|$$

直線 $y = g(x)$ が $y = -(x^2 - 4x + 3)$ と接するとき、
2次方程式

$$ax = -(x^2 - 4x + 3)$$

すなわち

$$x^2 + (a-4)x + 3 = 0$$

は重解を持つから

$$(\text{判別式}) = (a-4)^2 - 4 \cdot 3 = 0$$

$$(a-4+2\sqrt{3})(a-4-2\sqrt{3}) = 0 \quad \therefore a = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

$1 \leq x \leq 3$ において接するのは、図形的に考えて

$$a = 4 - 2\sqrt{3}$$

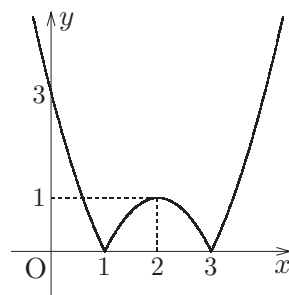
図を参考にして、

「曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ が共有点を4つもつ」

\Leftrightarrow 「曲線 $y = -(x^2 - 4x + 3)$ と直線 $y = ax$ が

$1 < x < 3$ において2交点をもつ」

$\Leftrightarrow 0 < a < 4 - 2\sqrt{3}$ (答)



(2) 曲線 $y = x^2 - 4x + 3$ と直線 $y = x$ の交点の x 座標は

$$x^2 - 4x + 3 = x$$

より

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$\alpha = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$, $\beta = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ とおくと、領域

$$|x^2 - 4x + 3| \leq y \leq x$$

の面積 S は

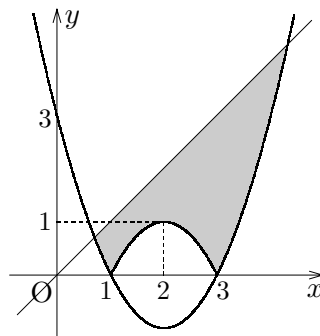
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{x - (x^2 - 4x + 3)\} dx - 2 \int_1^3 \{-(x^2 - 4x + 3)\} dx$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx + 2 \int_1^3 (x-1)(x-3) dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 - \frac{2}{6}(3-1)^3$$

$$= \frac{1}{6}(\sqrt{13})^3 - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{-16 + 13\sqrt{13}}{6} \quad (\text{答})$$



2

$$(1) \quad 3x^2 - 6x + 2 = 3(x-1)^2 - 1 = 3\left(x-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

と変形されるから, 2 次方程式 $3x^2 - 6x + 2 = 0$ の解

$$x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

は 0 でない相異なる 2 実数である。

(証明おわり)

(注) (判別式) > 0 かつ $3 \times 0^2 - 6 \times 0 + 2 \neq 0$ より示してもよい。

(2) 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = \frac{2}{3}$$

また,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

であることに注意する。

$$(i) \quad A_1 = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)(\alpha + \beta) = 3 \times 2 = 6$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)(\alpha + \beta)^2 \\ &= \left\{\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}\right\}(\alpha + \beta)^2 \\ &= \left(3^2 - 2 \times \frac{3}{2}\right) \times 2^2 = 24 \end{aligned}$$

はともに整数である。

(証明おわり)

$$\begin{aligned} (ii) \quad A_{n+1} &= (\alpha + \beta)^{n+1}(\alpha^{-n-1} + \beta^{-n-1}) \\ &= (\alpha + \beta)^{n+1}\{(\alpha^{-1} + \beta^{-1})(\alpha^{-n} + \beta^{-n}) - (\alpha\beta)^{-1}(\alpha^{-n+1} + \beta^{-n+1})\} \\ &= 2^{n+1}\left\{3(\alpha^{-n} + \beta^{-n}) - \frac{3}{2}(\alpha^{-n+1} + \beta^{-n+1})\right\} \\ &= 6 \cdot 2^n(\alpha^{-n} + \beta^{-n}) - 6 \cdot 2^{n-1}(\alpha^{-n+1} + \beta^{-n+1}) \\ &= 6A_n - 6A_{n-1} \end{aligned}$$

より, A_{n-1} および A_n が整数ならば A_{n+1} も整数であり, (i) より A_1, A_2 は整数であるから, 数学的帰納法により

すべての自然数 n について A は整数

となることがわかる。

(証明おわり)

$$\boxed{3} \quad OB^2 + OC^2 = BC^2 \text{ より}$$

$$\angle BOC = 90^\circ$$

であることを考え, 座標空間において

$$O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, 4, 0), C(0, 0, 3)$$

であるとしてよい。

$$(1) \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-a, 4, 0), \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-a, 0, 3)$$

$\angle BAC = \theta$ とおくと

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 16} \sqrt{a^2 + 9}} \quad (\text{答})$$

(2) 面積公式を用いて, $\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + 16)(a^2 + 9) - (a^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{25a^2 + 144} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 内接球 S_1 の半径を r とおいて, 四面体 $OABC$ の体積を 2 通りに表すと

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot 4 \right) r + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \right) r + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot a \right) r + \frac{1}{3} S r \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot 4 \right) \cdot 3 \\ &(4a + 12 + 3a + \sqrt{25a^2 + 144}) r = 12a \\ \therefore r &= \frac{12a}{7a + 12 + \sqrt{25a^2 + 144}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$ であるから, 四面体 $OABC$ の外接球面 S_2 と面 OAB , OBC , OCA との交線はそれぞれ AB , BC , CA を直径とする円であり,

xy 平面(平面 OAB)との交円の中心は AB の中点 $\left(\frac{a}{2}, 2, 0\right)$

yz 平面(平面 OBC)との交円の中心は BC の中点 $\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$

zx 平面(平面 OCA)との交円の中心は CA の中点 $\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$

よって, 球 S_2 の中心は $\left(\frac{a}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$,

$$\text{半径は } \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 25}}{2} \quad (\text{答})$$

である。

1

$$(1) \quad 3x^2 - 6x + 2 = 3(x-1)^2 - 1 = 3\left(x-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

と変形されるから, 2 次方程式 $3x^2 - 6x + 2 = 0$ の解

$$x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

は 0 でない相異なる 2 実数である。

(証明おわり)

(注) (判別式) > 0 かつ $3 \times 0^2 - 6 \times 0 + 2 \neq 0$ より示してもよい。

(2) 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = \frac{2}{3}$$

また,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

であることに注意する。

$$(i) \quad A_1 = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)(\alpha + \beta) = 3 \times 2 = 6$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)(\alpha + \beta)^2 \\ &= \left\{\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}\right\}(\alpha + \beta)^2 \\ &= \left(3^2 - 2 \times \frac{3}{2}\right) \times 2^2 = 24 \end{aligned}$$

はともに整数である。

(証明おわり)

$$\begin{aligned} (ii) \quad A_{n+1} &= (\alpha + \beta)^{n+1}(\alpha^{-n-1} + \beta^{-n-1}) \\ &= (\alpha + \beta)^{n+1}\{(\alpha^{-1} + \beta^{-1})(\alpha^{-n} + \beta^{-n}) - (\alpha\beta)^{-1}(\alpha^{-n+1} + \beta^{-n+1})\} \\ &= 2^{n+1}\left\{3(\alpha^{-n} + \beta^{-n}) - \frac{3}{2}(\alpha^{-n+1} + \beta^{-n+1})\right\} \\ &= 6 \cdot 2^n(\alpha^{-n} + \beta^{-n}) - 6 \cdot 2^{n-1}(\alpha^{-n+1} + \beta^{-n+1}) \\ &= 6A_n - 6A_{n-1} \end{aligned}$$

より, A_{n-1} および A_n が整数ならば A_{n+1} も整数であり, (i) より A_1, A_2 は整数であるから, 数学的帰納法により

すべての自然数 n について A は整数

となることがわかる。

(証明おわり)

$$\boxed{2} \quad OB^2 + OC^2 = BC^2 \text{ より}$$

$$\angle BOC = 90^\circ$$

であることを考え, 座標空間において

$$O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, 4, 0), C(0, 0, 3)$$

であるとしてよい。

$$(1) \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-a, 4, 0), \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-a, 0, 3)$$

$$\angle BAC = \theta \text{ とおくと}$$

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 16} \sqrt{a^2 + 9}} \quad (\text{答})$$

(2) 面積公式を用いて, $\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + 16)(a^2 + 9) - (a^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{25a^2 + 144} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 内接球 S_1 の半径を r とおいて, 四面体 $OABC$ の体積を 2 通りに表すと

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot 4 \right) r + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \right) r + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot a \right) r + \frac{1}{3} S r \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot 4 \right) \cdot 3 \\ &(4a + 12 + 3a + \sqrt{25a^2 + 144}) r = 12a \\ \therefore r &= \frac{12a}{7a + 12 + \sqrt{25a^2 + 144}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$ であるから, 四面体 $OABC$ の外接球面 S_2 と面 OAB , OBC , OCA との交線はそれぞれ AB , BC , CA を直径とする円であり,

$$xy \text{ 平面(平面 } OAB) \text{ との交円の中心は } AB \text{ の中点 } \left(\frac{a}{2}, 2, 0 \right)$$

$$yz \text{ 平面(平面 } OBC) \text{ との交円の中心は } BC \text{ の中点 } \left(0, 2, \frac{3}{2} \right)$$

$$zx \text{ 平面(平面 } OCA) \text{ との交円の中心は } CA \text{ の中点 } \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{3}{2} \right)$$

よって, 球 S_2 の中心は $\left(\frac{a}{2}, 2, \frac{3}{2} \right)$,

$$\text{半径は } \sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 + 2^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 25}}{2} \quad (\text{答})$$

である。

3

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f'(x) &= -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x \\
 &= \sqrt{2} e^{-x} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) \\
 &= \sqrt{2} e^{-x} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \sqrt{2} e^{-x} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

 $f'(x)$ の符号の変わり目

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi \quad (n \text{ は非負整数}) \quad (\text{答})$$

において, $f(x)$ は増減の変わり目となって極値をとる。 $f'(x)$ が $+$ \rightarrow $-$ となるのは n が偶数のときで, $-$ \rightarrow $+$ となるのは n が奇数のときであるから, $f(x)$ の

$$\begin{cases} \text{極大値は } f\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4} - 2n\pi} \\ \text{極小値は } f\left(\frac{5}{4}\pi + 2n\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{5}{4}\pi - 2n\pi} \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(答)

である。

$$(2) \quad a_n = f\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) \text{ とおくと}$$

$$a_0 > a_2 > a_4 > a_6 > \dots > 0, \quad a_1 < a_3 < a_5 < a_7 < \dots < 0$$

であることに注意して, $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ が 4 つの共有点をもつ範囲を求めると

$$(3 \text{ 番目の極大値}) < k < (2 \text{ 番目の極大値})$$

または

$$(2 \text{ 番目の極小値}) < k < (3 \text{ 番目の極小値})$$

(1)より

$$a_4 < k < a_2 \quad \text{または} \quad a_3 < k < a_5$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{17}{4}\pi} < k < \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{9}{4}\pi}$$

$$\text{または} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{13}{4}\pi} < k < -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{21}{4}\pi} \quad (\text{答})$$