I.

(i) $44^2 = 1936$，$45^2 = 2025$ より

$$44 < \sqrt{2009} < 45$$

であるから，$\sqrt{2009}$ の小数部分 a は

$$a = \sqrt{2009} - 44$$

$\dfrac{n}{88} < a < \dfrac{n+1}{88}$ とすると

$$44 + \frac{n}{88} < \sqrt{2009} < 44 + \frac{n+1}{88}$$

$$\left(44 + \frac{n}{88}\right)^2 < 2009 < \left(44 + \frac{n+1}{88}\right)^2$$

$$1936 + n + \left(\frac{n}{88}\right)^2 < 2009 < 1936 + (n+1) + \left(\frac{n+1}{88}\right)^2$$

$$\therefore\ \ n + \left(\frac{n}{88}\right)^2 < 73 < n + 1 + \left(\frac{n+1}{88}\right)^2$$

$0 < \left(\dfrac{n}{88}\right)^2 < \left(\dfrac{n+1}{88}\right)^2 \leqq 1$ より

$$n = \boxed{72}\ (イ)$$

(ii) $$\int_0^1 \frac{2x^3}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{2x(1+x^2-1)}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left\{2x - \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\right\} dx$$

$$= \Big[x^2 - \log(1+x^2)\Big]_0^1 = \boxed{1 - \log 2}\ (ロ)$$

(iii) 直線 $y = 2x + 3$ 上の任意の点 $(t,\ 2t+3)$ の像は直線 $y = x + 1$ 上にあるから

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2t+3 \end{pmatrix} \text{ かつ } y' = x' + 1$$

$$bt + 2(2t+3) = t + a(2t+3) + 1$$

$$\therefore\ \ (2a - b - 3)t + 3a - 5 = 0$$

この式が任意の実数 t に対して成り立つから

$$\begin{cases} 2a - b - 3 = 0 \\ 3a - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ \ a = \underset{(ハ)}{\boxed{\frac{5}{3}}},\quad b = \underset{(ニ)}{\boxed{\frac{1}{3}}}$$

(iv) 題意の設定より

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{p} & \cdots\cdots ① \\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{q} & \cdots\cdots ② \\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{r} & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つから，① + ③ − ② より

$$2\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{p} - \overrightarrow{q} + \overrightarrow{r}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \underset{(ホ)}{\boxed{\frac{1}{2}}}\overrightarrow{p} + \underset{(ヘ)}{\boxed{-\frac{1}{2}}}\overrightarrow{q} + \underset{(ト)}{\boxed{\frac{1}{2}}}\overrightarrow{r}$$

(v) A から C へのすべての最短経路は ${}_8\mathrm{C}_3$ 通り
A から B への最短経路は ${}_5\mathrm{C}_2$ 通り
B から C への最短経路は 3 通り

であるから，A を出発して B を通らないで C まで最短で行く道順は

$${}_8\mathrm{C}_3 - {}_5\mathrm{C}_2 \times 3 = 56 - 10 \times 3 = \underset{(チ)}{\boxed{26}}\text{ 通り}$$

である。

Ⅱ.

(i) $\triangle$OPQ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot s - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot t - \frac{1}{2}(1-s)(1-t) \\ &= \frac{1}{2}(1-st) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(ii) $S = \dfrac{1}{2}\cdot \overline{\mathrm{OP}}\cdot \overline{\mathrm{OQ}}\cdot \sin\theta$ であるから，(i)の結果とあわせて

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+t^2}\sin\theta = \frac{1}{2}(1-st)$$

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{1-st}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+t^2}} \quad (\text{答})$$

内積の定義式より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|} = \frac{s+t}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+t^2}} \quad (\text{答})$$

$\tan\theta$ の値は

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1-st}{s+t} \quad (\text{答})$$

(iii) $s+t=1$ により s を消去すると，

$$\tan\theta = 1-(1-t)t = t^2-t+1 = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において $\tan\theta$ は単調増加であるから，θ は

$$t = \frac{1}{2}\ \text{で最小，}\ t = 0,\ 1\ \text{で最大}$$

となり，$s+t=1$ より s も求めて，

$$\left\{\begin{array}{l} \theta\text{が最小となるのは}\ \ (s,\ t) = \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right) \\ \theta\text{が最大となるのは}\ \ (s,\ t) = (1,\ 0),\ (0,\ 1) \end{array}\right. \quad (\text{答})$$

のときである。

Ⅲ.　$f(x)=\dfrac{ax}{x^2+1}$

(i)　$f'(x)=\dfrac{a(x^2+1)-ax\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-a(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$$f''(x)=-a\cdot\frac{2x(x^2+1)^2-(x^2-1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{-2ax\{x^2+1-2(x^2-1)\}}{(x^2+1)^3}=\frac{2ax(x+\sqrt{3}\,)(x-\sqrt{3}\,)}{(x^2+1)^3}$$

$f''(x)$ は $x(x+\sqrt{3}\,)(x-\sqrt{3}\,)$ と同符号であるから，$f(x)$ の凹凸は

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

よって，C の変曲点は

$$\left(-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}a\right),\ (0,\ 0),\ \left(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)\quad \text{(答)}$$

(ii)　点$\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}a\right)$における C の法線 l の方程式は

$$1\cdot(x-\sqrt{3}\,)+f'(\sqrt{3}\,)\bigl(y-f(\sqrt{3}\,)\bigr)=0$$

$$x-\sqrt{3}-\frac{a}{8}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)=0\qquad \therefore\ x-\frac{a}{8}y+\frac{\sqrt{3}}{32}(a^2-32)=0$$

法線 l が原点 $(0,\ 0)$ を通るとすれば，

$$0-\frac{a}{8}\cdot 0+\frac{\sqrt{3}}{32}(a^2-32)=0\qquad \therefore\ a^2=32$$

$a>0$ より

$$a=4\sqrt{2}\quad \text{(答)}$$

(iii)　$f(-x)=-f(x)$ より $f(x)$ は奇関数で C は原点に関して対称であり，$0\leqq x\leqq\sqrt{3}$ で C は上に凸であることに注意すると，l と C で囲まれる部分の面積 S は

$$S=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{ax}{x^2+1}-\frac{8}{a}x\right)dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}\cdot\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}-2\sqrt{2}\,x\right)dx$$

$$=\Bigl[4\sqrt{2}\log(x^2+1)-\sqrt{2}\,x^2\Bigr]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=8\sqrt{2}\log 2-3\sqrt{2}\quad \text{(答)}$$

Ⅳ.

$$a_1 = 1\ ,\ a_n = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}} + 1 & (n \text{ は 2 以上の偶数}) \\ a_{n-1} + 1 & (n \text{ は 3 以上の奇数}) \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

(i) $n = 2^5$ のとき

$$a_{2^5} = a_{2^4} + 1 = a_{2^3} + 2 = a_{2^2} + 3 = a_2 + 4 = a_1 + 5 = 6 \quad (\text{答})$$

(ii) (i)の計算から

$$b_m = a_{2^m k} = a_k + m \quad \cdots\cdots ②$$

と推測され，この推測が正しいことを m についての数学的帰納法で証明する。

$$b_1 = a_{2k} = a_k + 1$$

より，$m = 1$ のとき ②は成り立つ。

$b_m = a_{2^m k} = a_k + m$ が成り立つとすれば，

$$b_{m+1} = a_{2^{m+1} k} = a_{2^m k} + 1 = (a_k + m) + 1 = a_k + (m+1)$$

も成り立つ。

以上より，任意の自然数 m に対して ②が成り立つ。 (証明おわり)

以下では，見やすくするために a_n を $a(n)$ と書くことにする。

(iii) $n = 2^{m_1} + 2^{m_2} = 2^{m_1}(1 + 2^{m_2 - m_1})$ $(m_1 < m_2)$ のとき

$$\begin{aligned} a_n = a(n) &= a(1 + 2^{m_2 - m_1}) + m_1 \quad (\because ②) \\ &= a(2^{m_2 - m_1}) + 1 + m_1 \quad (\because ①) \\ &= a_1 + (m_2 - m_1) + 1 + m_1 \quad (\because ②) \\ &= m_2 + 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(iv) $n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_r}$ $(m_1 < m_2 < \cdots < m_r)$ のとき

$$a_n = m_r + r \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つことを証明する。

①より

$$a_n = a(2^{m_1}) = a_1 + m_1 = m_1 + 1$$

であるから，$r = 1$ のとき ③は成り立つ。

r について ③が成り立つとすれば，

$$p = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_r} + 2^{m_{r+1}} \quad (m_1 < m_2 < \cdots < m_r < m_{r+1})$$

に対して

$$\begin{aligned} a_p &= a(2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_{r+1}}) \\ &= a(1 + 2^{m_2 - m_1} + \cdots + 2^{m_{r+1} - m_1}) + m_1 \quad (\because ②) \\ &= a(2^{m_2 - m_1} + \cdots + 2^{m_{r+1} - m_1}) + 1 + m_1 \quad (\because ①) \\ &= (m_{r+1} - m_1 + r) + 1 + m_1 \quad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= m_{r+1} + r + 1 \end{aligned}$$

が成り立つから，数学的帰納法により ③は正しいことが証明され，

$$a_n = m_r + r \quad (\text{答})$$