Ⅰ． 下記の空欄イ〜チにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(ⅰ) $\sqrt{2009}$ の小数部分を a とするとき,

$$\frac{n}{88} < a < \frac{n+1}{88}$$

をみたす自然数 n は $\boxed{\quad イ \quad}$ である.

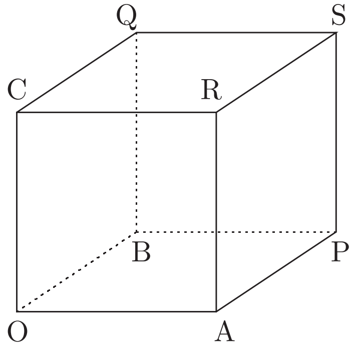
(ⅱ) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3}{1+x^2}\,dx$ の値は $\boxed{\quad ロ \quad}$ である.

(ⅲ) 実数 a, b に対して, 行列 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$ で表される移動により直線 $y = 2x + 3$ 上の任意の点が直線 $y = x + 1$ 上の点に移されるとき, $a = \boxed{\quad ハ \quad}$, $b = \boxed{\quad ニ \quad}$ である.

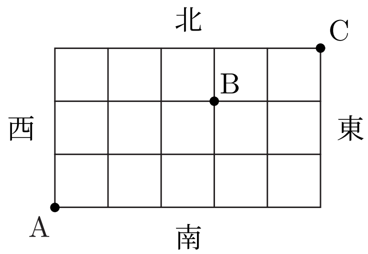
(ⅳ) 右図の立方体において, $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ とする. $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を表すと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boxed{\quad ホ \quad}\,\overrightarrow{p} + \boxed{\quad ヘ \quad}\,\overrightarrow{q} + \boxed{\quad ト \quad}\,\overrightarrow{r}$$

と表される.



(ⅴ) ある街には, 右図のように東西に 4 本, 南北に 6 本の道がある. A から出発して, B を通らないで C まで最短距離で行く道順は, 全部で $\boxed{\quad チ \quad}$ 通りある.



Ⅱ．　xy 平面上に点 P$(s,\ 1)$，点 Q$(1,\ t)$ があり，s，t は $0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 1$ をみたすものとする．また，点 O を原点 $(0,\ 0)$ とする．このとき，次の問(ⅰ)〜(ⅲ)に答えよ．

(ⅰ)　P と Q が異なるとき三角形 OPQ の面積を s, t を用いて表せ.

(ⅱ)　$\theta = \angle\mathrm{POQ}$ とするとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を s, t を用いて表せ.

(ⅲ)　s, t が $s + t = 1$ をみたすとき，θ を最小にする s, t の値と，θ を最大にする s, t の値をそれぞれ求めよ.

Ⅲ．正の数 a に対して関数 $f(x)=\dfrac{ax}{x^2+1}$ を考える．$y=f(x)$ のグラフを C とするとき，次の問(ｉ)〜(iii)に答えよ．

(ｉ)　C の変曲点をすべて求めよ．

(ii)　(iii)で求めた変曲点のうち x 座標が正である点における法線 l が原点 O$(0,\ 0)$ を通るような a の値を求めよ．

(iii)　a を(ii)で求めた値とする．このとき，法線 l と C で囲まれる部分の面積 S を求めよ．

Ⅳ. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 1\ ,\ a_n = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}} + 1 & (n\text{ は }2\text{ 以上の偶数}) \\ a_{n-1} + 1 & (n\text{ は }3\text{ 以上の奇数}) \end{cases}$$

たとえば,

$$a_2 = a_{\frac{2}{2}} + 1 = a_1 + 1 = 2\ ,$$
$$a_3 = a_{3-1} + 1 = a_2 + 1 = 3$$

となる.

このとき, 次の問(ⅰ)〜(ⅳ)に答えよ.

(ⅰ) $n = 2^5$ のとき a_n を求めよ.

(ⅱ) 自然数 k をひとつ固定して, 数列 $\{b_m\}$ を自然数 m に対して

$$b_m = a_{2^m k}$$

と定める. このとき, b_m を m と a_k を用いて表す式を推測し, その推測が正しいことを m についての数学的帰納法によって証明せよ.

(ⅲ) n が自然数 m_1, m_2 ($m_1 < m_2$) により $n = 2^{m_1} + 2^{m_2}$ と表されるとき, (ⅱ)の結果を用いて a_n を求めよ.

(ⅳ) n が自然数 m_1, $m_2, \cdots$, m_r ($m_1 < m_2 < \cdots < m_r$) により

$$n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_r}$$

と表されるとき a_n を求めよ.