問 1

(1)　与えられた漸化式より

$$3a_3 - 5\times 2 + 2\times 1 = 0 \qquad \therefore\ a_3 = \frac{8}{3} \quad \text{(答)}$$

(2)

$$3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を変形して

$$3(a_{n+2} - a_{n+1}) - 2(a_{n+1} - a_n) = 0$$

$$\therefore\ a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) \qquad \cdots\cdots ②$$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n \quad \text{(答)}$$

(3)　②より $\{a_{n+1} - a_n\}$ は初項 $a_2 - a_1 = 1$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad \cdots\cdots ③$$

②と同様にして，①を変形すると

$$3a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3a_{n+1} - 2a_n$$

$a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n$ は定数であるから

$$a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n = a_2 - \frac{2}{3}a_1 = \frac{4}{3} \qquad \cdots\cdots ④$$

④ − ③より

$$\frac{1}{3}a_n = \frac{4}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n = 4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{(答)}$$

問 2

(1)　$\angle\mathrm{BOP} = 90^\circ$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2y + \sqrt{2}\,z = 0 \qquad \therefore\ z = -\sqrt{2}\,y \quad (答)$$

(2)　$\cos\angle\mathrm{OAP} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 1 \times \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| \times \sqrt{\frac{2}{3}} = -1 \times (z-1)$$

(1)を考えあわせて

$$\begin{aligned}\sqrt{2\left\{x^2+y^2+(-\sqrt{2}\,y-1)^2\right\}} &= -\sqrt{3}\,(-\sqrt{2}\,y-1)\\ &= \sqrt{3}\,(\sqrt{2}\,y+1)\end{aligned}$$

$y \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のもとで

$$\begin{aligned}&2x^2+2y^2+2(\sqrt{2}\,y+1)^2 = 3(\sqrt{2}\,y+1)^2\\ &2x^2+2y^2 = (\sqrt{2}\,y+1)^2\\ &2x^2 = 2\sqrt{2}\,y+1\end{aligned}$$

$$\therefore\ y = \frac{2x^2-1}{2\sqrt{2}} \quad (答)$$

(3)　(1), (2)より

$$z = \frac{-2x^2+1}{2}$$

であるから，$x=0$ のとき

z の最大値は $\dfrac{1}{2}$　(答)

問 3

(1)　$S=\displaystyle\int_0^a (x^2-2bx+3c)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-bx^2+3cx\right]_0^a=\frac{1}{3}a^3-a^2b+3ac$　(答)

(2)　$S=\dfrac{1}{3}(a^3-3a^2b+9ac)=0 \iff a^3=3a^2b-9ac=3(a^2-3ac)$

$\Longrightarrow$「a^3 は 3 で割り切れる」

3 は素数であるから，「a^3 が 3 で割り切れる」ことと「a が 3 で割り切れる」ことは同値であり，$S=0$ であるためには，a は 3 の倍数であることが必要である。

(おわり)

(3)　(2)より $a=0,\ 3,\ 6,\ 9$ が必要であることを考え，

$$S=\frac{a}{3}(a^2-3ab+9c)=0,\ \ a>b>c$$

となる $(a,\ b,\ c)$ の組を求めると，

(i)　$a=0$ のとき，$a>b>c$ とならないから不適である。

(ii)　$a=3$ のとき

$$S=9-9b+9c=9(1-b+c) \qquad \therefore\ c=b-1$$

$$\therefore\ (a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 1),\ (3,\ 1,\ 0)$$

(iii)　$a=6$ のとき

$$S=2(36-18b+9c)=18(4-2b+c)=0 \qquad \therefore\ c=2b-4$$

$0\leqq 2b-4<b$ より $2\leqq b<4$ であるから

$$(a,\ b,\ c)=(6,\ 3,\ 2),\ (6,\ 2,\ 0)$$

(iv)　$a=9$ のとき

$$S=27(9-3b+c)=0 \qquad \therefore\ c=3b-9$$

$0\leqq 3b-9<b$ より $3\leqq b<\dfrac{9}{2}=4+\dfrac{1}{2}$ であるから

$$(a,\ b,\ c)=(9,\ 4,\ 3),\ (9,\ 3,\ 0)$$

以上より，$S=0$ となる確率は

$$\frac{6}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}\quad \text{(答)}$$

問 4

(1)　$\alpha > 0,\ \beta > 0$ を考え，相加・相乗平均の大小関係より

$$\frac{x^2}{y} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 2 \geqq 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}} + 2 = 4$$

ここで，不等式の等号は

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}\ (\alpha > 0,\ \beta > 0)\ \text{すなわち}\ \ \alpha = \beta$$

のとき成り立つから，

$$\frac{x^2}{y}\ \text{の最小値は}\ 4,\ \ \text{そのとき}\ \alpha = \beta \quad \text{(答)}$$

(2)

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = x^2 - 2y$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = x^3 - 3yx$$

であるから，等式(A)が成り立つとき，

$$x^2 - 2y = x^3 - 3xy \qquad \therefore\ \ (3x-2)y = x^3 - x^2$$

ここで，$3x - 2 = 0$ であるとすれば，

$$\left(3\cdot\frac{2}{3} - 2\right)y = 0,\ \ \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \neq 0$$

となって矛盾するから $3x - 2 \neq 0$ としてよく，

$$y = \frac{x^3 - x^2}{3x - 2} \quad \text{(答)}$$

(3)　(1)を参考にして

$$z = \frac{x^2}{y},\ \ t = \frac{\beta}{\alpha}\ (> 0)$$

とおくと，

$$z = t + \frac{1}{t} + 2 \qquad \therefore\ \ t^2 - (z-2)t + 1 = 0$$

この 2 次方程式が正の解をもつための条件を考えると，

$$(2\ \text{解の積}) = 1 > 0$$

より 2 解がともに正となる条件を求めればよいことになり，

$$\begin{cases} (\text{判別式}) = (z-2)^2 - 4 = z(z-4) \geqq 0 \\ (2\ \text{解の和}) = z - 2 > 0 \\ (2\ \text{解の積}) = 1 > 0 \end{cases}$$

これは必要十分条件であるから

$$z = \frac{x^2}{y}\ \text{のとり得る値の範囲は}\ z \geqq 4$$

であり，(2)より

$$\frac{x^2}{y}=\frac{3x-2}{x-1}\geqq 4$$

これを $x>0$ のもとで同値変形して

$$(3x-2)(x-1)\geqq 4(x-1)^2 \text{ かつ } x-1\neq 0$$
$$(x-1)(x-2)\leqq 0 \text{ かつ } x\neq 1$$
$$\therefore\ 1<x\leqq 2 \quad (\text{答})$$

(注)

1° (1)において，相加・相乗平均の大小関係からわかることは

$\dfrac{x^2}{y}<4$ となることはない，$\dfrac{x^2}{y}=4$ となる $x,\ y$ が存在する

ということだけであって，

$\dfrac{x^2}{y}$ が 4 以上のすべての実数値をとり得るかどうか

まではわからない。公式を誤用しないようにしたい。

2° $\alpha,\ \beta$ を 2 解とする 2 次方程式

$$X^2-xX+y=0$$

の 2 解がともに正となる条件を考え，

$$\begin{cases}(\text{判別式})=x^2-4y\geqq 0\\(2\text{ 解の和})=x>0\\(2\text{ 解の積})=y>0\end{cases}$$

に(2)の結果 $y=\dfrac{x^3-x^2}{3x-2}$ を代入して連立不等式を解いてもよい。

$$x^2-4y=\frac{x^2(3x-2)-4(x^3-x^2)}{3x-2}=\frac{-x^2(x-2)}{3x-2}\geqq 0$$
$$\iff -x^2(x-2)(3x-2)\geqq 0 \text{ かつ } 3x-2\neq 0$$
$$\iff x=0 \text{ または } \frac{2}{3}<x\leqq 2$$

$$y=\frac{x^2(x-1)}{3x-2}>0 \iff x^2(x-1)(3x-2)>0$$
$$\iff 0<x<\frac{2}{3} \text{ または } x>1$$

より，同じ結果を得る。