

問1 条件 $a_1 = 1, a_2 = 2, 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定められる数列 $\{a_n\}$ について、次の各問に答えよ。解答欄に答のみ記入せよ。

(1) 第3項 a_3 を求めよ。

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと、 b_{n+1} を b_n の式で表せ。

(3) 一般項 a_n を n の式で表せ。

問2 座標空間内の点 $O(0, 0, 0), A(0, 0, 1), B(0, 2, \sqrt{2}), P(x, y, z)$ について、 $\cos \angle OAP = \sqrt{\frac{2}{3}}$ であり、 $\angle BOP = 90^\circ$ である。このとき、次の各問に答えよ。解答欄に答のみ記入せよ。

(1) z を y の式で表せ。

(2) y を x の式で表せ。

(3) z の最大値を求めよ。

問3 0 から 9 までの数字が 1 つずつ記入された 10 枚のカードがある。この中から 3 枚のカードを同時に取り出し、それらの数を a, b, c ($a > b > c$) とし、

$$S = \int_0^a (x^2 - 2bx + 3c) dx$$

とする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) S を a, b, c で表せ。

(2) $S = 0$ であるためには、 a は 3 の倍数でなければならないことを示せ。

(3) $S = 0$ となる確率を求めよ。

問4 正の実数 α , β について,

$$x = \alpha + \beta, y = \alpha\beta$$

とおく。このとき、次の各問に答えよ。

(1) $\frac{x^2}{y}$ の最小値を求め、そのときの α と β の関係式も求めよ。

(2) 等式

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^3 + \beta^3 \dots\dots\dots (A)$$

が成り立つとき、 y を x の式で表せ。

(3) 等式(A)が成り立つとき、 x のとり得る値の範囲を求めよ。

[以 下 余 白]