

数チャレ 第1回(2001年2月)

2001以下の自然数で2001と互いに素であるものはいくつあるか。
 また、一般の自然数 n に対して、 n 以下の自然数で n と互いに素であるものの個数は、
 どのような式で表現されるか。

解答

2001を素因数分解すると

$$2001 = 3 \times 23 \times 29$$

となるから、2001以下の自然数で k で割り切れるものの個数を $N(k)$ で表せば、

$$N(3) = 23 \times 29, \quad N(23) = 3 \times 29, \quad N(29) = 3 \times 23,$$

$$N(3 \times 23) = 29, \quad N(3 \times 29) = 23, \quad N(23 \times 29) = 3, \quad N(2001) = 1.$$

したがって、2001以下の自然数で2001とは互いに素であるものの個数は

$$\begin{aligned} & 2001 - \{N(3) + N(23) + N(29) - N(3 \times 23) - N(3 \times 29) - N(23 \times 29) + N(2001)\} \\ &= 3 \times 23 \times 29 - (23 \times 29 + 3 \times 29 + 3 \times 23) + (29 + 23 + 3) - 1 \\ &= (3 - 1) \times (23 - 1) \times (29 - 1) \\ &= \mathbf{1232} \end{aligned}$$

一般の自然数 n に対して、 n 以下の自然数で k で割り切れるものの個数を $N(k)$ と表し、 n の素因数分解を

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r} \quad (\text{各 } p_i \text{ は相異なる素数, } e_i \text{ は自然数})$$

とする。さらに、 r 個の数 x_1, x_2, \dots, x_r についての j 次基本対称式を $s_j(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ($j \leq r$)と表す。すなわち、

$$\begin{aligned} s_1(x_1, x_2, \dots, x_r) &= x_1 + x_2 + \cdots + x_r \\ s_2(x_1, x_2, \dots, x_r) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_r + x_2x_3 + \cdots + x_{r-1}x_r \\ &\vdots \\ s_r(x_1, x_2, \dots, x_r) &= x_1x_2 \cdots x_r \end{aligned}$$

n と互いに素であることは p_1, p_2, \dots, p_r と互いに素であることと同値であるから、 n 以下の自然数で n と互いに素であるものの個数 $\varphi(n)$ は

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - \{N(p_1) + N(p_2) + \cdots + N(p_r)\} \\ &\quad + \{N(p_1p_2) + N(p_1p_3) + \cdots + N(p_1p_r) + N(p_2p_3) + \cdots + N(p_{r-1}p_r)\} \\ &\quad - \cdots + (-1)^r N(p_1p_2 \cdots p_r) \\ &= n + \sum_{k=1}^r (-1)^k \sum_{\{i(1), i(2), \dots, i(k)\} \subset \{1, 2, \dots, r\}} N(p_{i(1)} p_{i(2)} \cdots p_{i(k)}) \\ &= n + \sum_{k=1}^r (-1)^k \sum_{\{i(1), i(2), \dots, i(k)\} \subset \{1, 2, \dots, r\}} \frac{n}{p_{i(1)} p_{i(2)} \cdots p_{i(k)}} \\ &= n \left\{ 1 + \sum_{k=1}^r (-1)^k s_k \left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \dots, \frac{1}{p_r} \right) \right\} \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r} \right) \end{aligned}$$