数チャレ 第2回(2001年3月)

自然数 n の正の約数の総和を $S(n)$ で表す。$S(n)=2001$ となる自然数 n は存在しないことを示せ。

解答

ある自然数 n に対して $S(n)=2001$ が成り立つとして矛盾を導く。
n の素因数分解を $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}$ (各 p_i は相異なる素数, e_i は自然数) とすると

$$S(n)=(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{e_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{e_2})\cdots$$
$$\cdots(1+p_r+p_r^2+\cdots+p_r^{e_r})$$

となるから, $S(n)=2001=3\times23\times29$ ならば n の素因数は 3 個以下である。ところが,

$$1+2+2^2+2^3<23<29<1+2+2^2+2^3+2^4$$
$$1+3+3^2<23<29<1+3+3^2+3^3$$
$$1+p<23<29<1+p+p^2 \quad (p=5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19)$$
$$23<1+23<29<1+23+23^2$$
$$23<29<1+p \quad (p\geqq 29)$$

より

**23 および 29 は $\boldsymbol{1+p+p^2+\cdots+p^k}$ ($\boldsymbol{p}$ は素数, $\boldsymbol{k}$ は自然数)
の形に表せない**

から, n の素因数は 2 個以下である。

(i) **$\boldsymbol{n}$ の素因数が 2 個のとき**

一方の素因数 p は

$$1+p+p^2+\cdots+p^{m-1}=\frac{p^m-1}{p-1}=23\times29$$

を満たすことになり,

$$p^m=667p-666$$

となる。$23\times29-1=p+p^2+\cdots+p^{m-1}=666$ は素数でないから $m-1\geqq2$ であり, $25^2<23\times29<26^2$ より

$$p\leqq 23$$

の場合だけ考えればよい。$p(p^{m-1}-667)=666=2\times3^2\times37$ より $p=2,\ 3$ に限られ,

$$p=2 \text{ のとき } \ 667p-666=668=2^2\times167\neq 2^m$$
$$p=3 \text{ のとき } \ 667p-666=1335=3\times5\times89\neq 3^m$$

であるから $S(n)=2001$ とならない。

(ii) **$\boldsymbol{n=p^{m-1}}$ ($\boldsymbol{p}$ はただ 1 つの素因数)のとき**

$$1+p+p^2+\cdots+p^{m-1}=\frac{p^m-1}{p-1}=2001$$

より

$$p^m = 2001p - 2000$$

となるが，$p(2001 - p^{m-1}) = 2000 = 2^4 \times 5^3$ より $p = 2,\ 5$ に限られて，

$$p = 2 \text{ のとき }\ 2001p - 2000 = 2002 = 2 \times 1001 \neq 2^m$$
$$p = 5 \text{ のとき }\ 2001p - 2000 = 8005 = 5 \times 1601 \neq 5^m$$

であるから $S(n) = 2001$ とならない。 (おわり)