数チャレ 第4回(2001年5月)

方程式 $(x-y)(x^2-y)(x^2+y^2)=2001$ を満たす自然数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ。

解答

$x=1$ とすれば,

$$(1-y)^2(1+y^2)=2001=3\times 23\times 29$$

より平方因数 $(1-y)^2$ は 1 となるが,そのとき $y=2$ (または 0) となって方程式を満たさない。よって,

$$x\neq 1 \quad 特に \quad x<x^2$$

(i) $1\leqq x-y<x^2-y<x^2+y^2$ のとき

$x-y=1$ とすれば

$$\begin{aligned}(x-y)(x^2-y)(x^2+y^2)&=\{(y+1)^2-y\}\{(y+1)^2+y^2\}\\&=(y^2+y+1)(2y^2+2y+1)\end{aligned}$$

ここで,$2y^2+2y+1=2y(y+1)+1$ は 4 で割ると 1 余る自然数であるが,2001 の約数の中では $y^2+y+1>1$ を考えると 29,3×23 に限られ,それぞれ

$$y(y+1)=14 \text{ または } 34$$

となって自然数 y は存在しない。よって,

$$1<x-y<x^2-y<x^2+y^2$$

となるから,

$$x-y=3,\quad x^2-y=23,\quad x^2+y^2=29$$

これらをすべて満たす自然数 $x,\ y$ は $x=5,\ y=2$ だけである。

(ii) $1\leqq y-x^2<y-x<x^2+y^2$ のとき

$y-x^2=1$ とすれば,

$$(y-x)(y-x^2)(x^2+y^2)=(x^2-x+1)\{x^2+(x^2+1)^2\}=f(x)$$

は $x\geqq 1$ で単調増加の関数であり,

$$f(3)=763,\quad f(4)=3965$$

であるから 2001 と一致しない。よって,

$$1<y-x^2<y-x<x^2+y^2$$

となるから,

$$y-x^2=3,\quad y-x=23,\quad x^2+y^2=29$$

であるが,はじめの 2 式から $x=5,\ y=28$ となって $x^2+y^2=29$ を満たさない。

以上より,求めるすべての自然数解は

$$x=5,\ y=2 \quad (答)$$