数チャレ 第5回(2001年6月)

${}_{2001}\mathrm{C}_{13}$ は 3 でちょうど何回割り切れるか。すなわち，

$$ {}_{2001}\mathrm{C}_{13} = \frac{2001 \times 2000 \times 1999 \times \cdots \times 1989}{13 \times 12 \times 11 \times \cdots \times 1} = 3^m n $$

(m, n は自然数，n は 3 で割り切れない)

と表すとき，自然数 m を求めよ。

解答

p を 2 以上の自然数，e を自然数とし，2 以上の自然数 n が p^e で割れて p^{e+1} で割れないものとする。1 から n までにおいて p^k (k は $1 \leqq k \leqq e$ を満たす自然数)で割れ切れる自然数の個数は $\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$ $\left(\dfrac{n}{p^k}\text{の整数部分}\right)$ で表されるから，$n!$ が p で何回割れるかを表す数 $D_p(n)$ は

$$ D_p(n) = \sum_{k=1}^{e-1} k \left\{ \left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right] \right\} + e\left[\frac{n}{p^e}\right] = \sum_{k=1}^{e} \left[\frac{n}{p^k}\right] $$

と求められる。

${}_{2001}\mathrm{C}_{13} = \dfrac{2001!}{13!\,1988!}$ であるから，$D_3(2001) - D_3(13) - D_3(1988)$を求めればよい。

$$ D_3(2001) = \sum_{k=1}^{6} \left[\frac{2001}{3^k}\right] = 667 + 222 + 74 + 24 + 8 + 2 = 997 $$

$$ D_3(13) = \left[\frac{13}{3}\right] + \left[\frac{13}{9}\right] = 4 + 1 = 5 $$

$$ D_3(1988) = \sum_{k=1}^{6} \left[\frac{1988}{3^k}\right] = 662 + 220 + 73 + 24 + 8 + 2 = 989 $$

であるから，求める数は

$$ D_3(2001) - D_3(13) - D_3(1988) = 997 - 5 - 989 = 3 \quad (\text{答}) $$