数チャレ 第７回 (2001 年８月)

(1)　2001 を連続する自然数のいくつかの和で表すとき，項数が最大となる表現を求めよ。

(2)　一般に，二つ以上の連続する自然数の和で表される数であるための必要十分条件を求めよ。

解答

(1) (a)　項数が $2n$ (n は自然数)のとき，中央項を m，$m+1$ とすると

$$2001 = (m-n+1)+(m-n+2)+\cdots+(m-1)+m+(m+1)+\cdots+(m+n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{(m-k)+(m+1+k)\right\} = n(2m+1)$$

$m-n+1 \geqq 1$ に注意すると，

$$2001 = 3\times 23\times 29 \geqq n(2n+1),\quad n \,\big|\, 2001$$

より

最大の n は $n=29$，そのとき $m=34$

(b)　項数が $2n+1$ (n は自然数) のとき，中央項を m とすると

$$2001 = (m-n)+(m-n+1)+\cdots+(m-1)+m+(m+1)+\cdots+(m+n)$$
$$= m + \sum_{k=0}^{n-1}\left\{(m-k)+(m+k)\right\} = m(2n+1)$$

$m-n>0$ に注意すると，

$$2001 = 3\times 23\times 29 > n(2n+1),\quad 2n+1 \,\big|\, 2001$$

より，n が最大となるのは $2n+1=29$ のときであり，

最大の n は $n=14$，そのとき $m=69$

以上 (a)，(b) より，求める表現は

$$2001 = \sum_{k=34-29+1}^{34+29} k \;=\; 6+7+8+\cdots+63 \quad (答)$$

（注）記号 $a \,\big|\, b$ は，整数 a が整数 b の約数であることを表す。

(2)　3 以上の奇数 $2n+1$ を約数にもつ自然数 $m(2n+1)$ は

$$m(2n+1) = (m-n)+(m-n+1)+\cdots+(m-1)+m+(m+1)+\cdots+(m+n)$$

と連続する整数の和で表される。$m-n \geqq 1$ のときは，二つ以上の連続する自然数の和である。

$m-n \leqq 0$ のとき，$(m-n)+(m-n+1)+\cdots+(n-m-1)+(n-m)$ が相殺されて，

$$m(2n+1) = (n-m+1)+(n-m+2)+\cdots+(m+n)$$

と連続する自然数の和で表される。$n-m+1 < m+n$ であるから，二数以上の和である。

以下，奇素数を約数にもたない自然数を考える。その自然数は，ある自然数 n を用いて 2^{n-1} と表される。そこで，自然数 m，k を用いて

$$2^{n-1} = m+(m+1)+\cdots+(m+k) = \frac{k+1}{2}(2m+k)$$

と表されるとすれば，これを k について整理して

$$k^2+(2m+1)k+(2m-2^n)=0$$

k は自然数であるから，必要条件として判別式は平方数で，

$$(2m+1)^2-4(2m-2^n)=(2m-1)^2+2^{n+2}=d^2$$

を満たす自然数 d が存在する。このとき

$$2^{n+2}=d^2-(2m-1)^2=(d+2m-1)(d-2m+1)$$

ここで，

$$(d+2m-1)-(k-2m+1)=2(2m-1)\quad (\text{偶数})$$

より 2 数はともに偶数であるから，$a+b=n+2$，$a \geqq b$ を満たす自然数 a，b を用いて

$$d+2m-1=2^a,\quad d-2m+1=2^b$$

と表される。これを解くと，

$$2m-1=2^{a-1}-2^{b-1},\quad d=2^{a-1}+2^{b-1}$$

はともに奇数であるから，$a \geqq b$，$a+b=n+2$ より

$$b=1,\quad a=n+1,\quad 2m-1=2^n-1,\quad d=2^n+1$$

であり，2 次方程式の解の公式より

$$k=\frac{-(2m+1)\pm d}{2}=\frac{-(2^n+1)\pm(2^n+1)}{2}=0 \text{ または } -2^n-1$$

これは，k が自然数(正の整数)であることに反する。

以上より，二つ以上の連続する自然数の和で表される数であるための必要十分条件は，

2 以外の素因数を含む自然数　(答)

（注） 正解と同値な表現は他にも存在する。