数チャレ 第９回 (2001年10月)

直角三角形の 3 辺の長さがすべて整数であるとき，次が成り立つことを示せ。

(1) 面積は 2 の整数倍である。

(2) 直角をはさむ 2 辺の長さが互いに素ならば，直角をはさむ 2 辺の長さの和と斜辺の長さは互いに素である。

解答

直角をはさむ 2 辺の長さを $a,\ b$ とし，斜辺の長さを c とすると，三平方の定理より

$$a^2+b^2=c^2$$

が成り立つ。ここで，$a,\ b,\ c$ は正の整数である。

(1) 面積は $\dfrac{1}{2}ab$ であるから，ab が 4 の倍数であることを示せばよい。

(i) $a,\ b$ がともに偶数であるときは，明らかに ab は 4 の倍数である。

(ii) $a,\ b$ がともに奇数であるとき

$$a=2m-1,\quad b=2n-1\quad (m,\ n \text{ は正の整数})$$

と表されるから，

$$a^2+b^2=4(m^2-m+n^2-n)+2$$

ところが，c は偶数で c^2 は 4 の倍数であるから，$a^2+b^2=c^2$ は満たさない。

(iii) $a,\ b$ の偶奇が異なるとき

a が偶数，b が奇数として一般性を失わない。

$$b=2m-1,\quad c=2n-1\quad (m,\ n \text{ は正の整数})$$

とおくことができて

$$a^2=c^2-b^2=4\{n(n-1)-m(m-1)\}$$

と表される。連続する 2 整数の一方は偶数であるから，

a^2 は 8 の倍数である。

したがって，a は 4 の倍数であるから，特に

ab は 4 の倍数である。

(おわり)

(2) 背理法で示す。

$a+b$ と c が互いに素でないとすれば，共通の素因数 p が存在して

$$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=(a+b)^2-c^2$$

は p^2 で割り切れるから，a または b は p で割り切れる。

$a+b$ は p で割り切れるから，結局 a も b も p で割り切れることになって，a と b が互いに素であるという仮定に反する。

(おわり)