数チャレ 第10回(2001年11月)

(1) k を $1 \leqq k \leqq p-1$ なる整数とするとき，${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れて p^2 で割り切れないことを示せ。

(2) p を奇素数，a と b を正の整数とするとき，$(a+bi)^p$ は実数ではないことを示せ。ただし，i は虚数単位を表す。

参考：2000 年 京都大学

解答

(1) p と k は互いに素であり，

$$ {}_p\mathrm{C}_k = \frac{p}{k}\,{}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1} = p\,\frac{(p-1)!}{k!\,(p-k)!} $$

および ${}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}$ はともに整数であるから，${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れる。また，$(p-1)!$ は p と互いに素であるから，${}_p\mathrm{C}_k$ は p^2 で割り切れない。

(おわり)

(2) a と b の最大公約数を d とすると

$$ a = md,\quad b = nd \quad (m,\ n \text{ は正の整数}) $$

と表され，$(a+bi)^p = d^p(m+ni)^p$ が実数でないことを示すには $(m+ni)^p$ が実数でないことを示せば十分であるから，はじめから

a と b は互いに素

と仮定してよい。

$(a+bi)^p$ の虚部 I は

$$ I = {}_p\mathrm{C}_1\,a^{p-1}b - {}_p\mathrm{C}_3\,a^{p-3}b^3 + \cdots + (-1)^{\frac{p-3}{2}}\,{}_p\mathrm{C}_{p-2}\,a^2b^{p-2} + (-1)^{\frac{p-1}{2}}b^p $$

(i) b が p で割り切れないとき

$(-1)^{\frac{p-1}{2}}b^p$ は p で割り切れず，それ以外の項は(1)により p で割り切れるから，虚部 I は p で割り切れない。

(ii) b が p で割り切れるとき

b が p でちょうど k 回割り切れる，すなわち

$$ b = p^k c \quad (c \text{ は } p \text{ で割り切れない整数，} k \text{ は正の整数}) $$

と表すとき，a と b が互いに素ならば a は p で割り切れないから

$$ {}_p\mathrm{C}_1\,a^{p-1}b = p^{k+1}a^{p-1}c $$

は p でちょうど $k+1$ 回割り切れるが，それ以外の項は b^3 で割り切れるから p で $3k$ 回以上割り切れる。I は p^{k+1} で割り切れ，$3k > k+1$ であるから

$$ \frac{I}{p^{k+1}} \equiv a^{p-1}c \not\equiv 0 \pmod{p} $$

以上より $I \neq 0$ であり，$(a+bi)^p$ は実数でない。

(おわり)