

数チャレ 第11回 (2001年12月)

p を素数とするとき、次の定理を証明せよ。

(1) p で割り切れない任意の整数 a に対して、

$$ax \equiv y \pmod{p}, \quad 1 \leq x < \sqrt{p}, \quad 1 \leq |y| < \sqrt{p}$$

を満たす整数 x, y が存在する。

(2) $a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ を満たす整数 a が存在するならば、

$$p = x^2 + y^2$$

を満たす整数 x, y が存在する。

解答

(1) \sqrt{p} の整数部分 (\sqrt{p} を越えない最大整数) を n とおくと、

$$n < \sqrt{p} < n + 1$$

いま、 x, y をそれぞれ $0, 1, 2, \dots, n$ の中から選んで

$$ax - y \quad (x, y \in \{0, 1, 2, \dots, n\})$$

を考えると、その個数は $(n+1)^2$ で p より大きいから、

$$ax_1 - y_1 \equiv ax_2 - y_2 \pmod{p}, \quad (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$$

を満たす 0 以上 n 以下の整数 x_1, y_1, x_2, y_2 が存在する。このとき

$$a(x_1 - x_2) \equiv y_1 - y_2 \pmod{p}$$

となるから、結局

$$x_1 \not\equiv x_2 \pmod{p} \quad \text{かつ} \quad y_1 \not\equiv y_2 \pmod{p}$$

が成り立つ。

必要ならば x_1 と x_2 を入れかえて $x = x_1 - x_2 > 0$ としてよいから、

$$1 \leq x = x_1 - x_2 \leq n < \sqrt{p}$$

であり、さらに $y = y_1 - y_2$ とおくと、

$$1 \leq |y| = |y_1 - y_2| \leq n < \sqrt{p}, \quad ax \equiv y \pmod{p} \quad (\text{おわり})$$

(2) $a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ を満たす整数 a に対して、(1) で定まる整数 x, y を用いると、

$$x^2 + y^2 \equiv x^2 + a^2 x^2 \equiv (1 + a^2)x^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

$1 \leq x^2 < p, \quad 1 \leq y^2 < p$ より $2 \leq x^2 + y^2 < 2p$ であるから、

$$p = x^2 + y^2 \quad (\text{おわり})$$

(注) Wilson の定理より

$$p \text{ が素数} \iff (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

であるから、素数 p が $p = 4m + 1$ (m は自然数) と表されるならば、

$$\begin{aligned} (p-1)! &= (4m)! = (2m)! \times (p-2m)(p-2m+1) \cdots (p-1) \\ &\equiv (2m)! \times (2m)! \pmod{p} \end{aligned}$$

となって、 $a = (2m)!$ は (2) の仮定を満たす。

(1) は Thue の剰余定理と呼ばれている。